РУКОВОДСТВО

къ

АРИѲМЕТИКѢ

АРИѲМЕТИКА ЦѢЛЫХЪ ЧИСЕЛЪ

составилъ

Н. В. Бугаевъ.

Заслуженный ординарный профессоръ ИМПЕРАТОРСКАГО Московскаго Университета

Изданіе десятое.

Книжный магазинъ Н. И. Мамонтова:
Москва, Кузнецкій мостъ, домъ Захарьина.
1898.

Дозволено цензурою. Москва, 13 сентября 1897 года.

Товарищество типографіи А. И. Мамонтова. въ Москвѣ.

Предисловіе.

Въ предлагаемомъ руководствѣ мы обращали очень мало вниманія на методическіе пріемы изложенія. Наша цѣль была иная. Методическіе пріемы умѣстны болѣе въ классѣ, а не въ книгѣ. Являясь въ книгѣ, они должны быть проведены во всей полнотѣ, сопровождаться критической оцѣнкой каждой методы. Это задача сочиненій, имѣющихъ въ виду болѣе преподавателя, чѣмъ ученика.

Являясь же въ систематическомъ руководствѣ безъ должной обстановки, урывками, методическіе пріемы лишаютъ его единства и строгой системы. Они отвлекаютъ вниманіе учащагося отъ самой сущности дѣла, мѣшаютъ понять научное содержаніе въ его цѣломъ; а такое пониманіе составляетъ необходимую принадлежность математическаго образованія. Кромѣ того, всякій методическій пріемъ, односторонне развитый въ книгѣ, стѣсняетъ преподавателя, лишая его необходимой свободы. Въ выборѣ метода и въ расположеніи классныхъ занятій преподавателю нужно постоянно сообразоваться съ научнымъ матеріаломъ и съ индивидуальными свойствами учащихся. Впрочемъ, мы всегда руководились указаніями методики тамъ, гдѣ они, не мѣшая строгости и точности систематическаго изложенія, помогали достигать какихъ-нибудь важныхъ педагогическихъ цѣлей.

Руководство наше предполагаетъ тотъ возрастъ, къ которому учащійся имѣетъ элементарныя ариѳметическія знанія въ такомъ объемѣ, въ какомъ они требуются отъ поступающихъ въ гимназію. Мы не пытались также нашимъ учебникомъ совершенно устранить, заслонить преподавателя. Мы не хотѣли давать такого сочиненія, гдѣ бы его помощь была не нужна Такая цѣль выполняется руководствами, извѣстными подъ именемъ самоучителей. Они преслѣдуютъ иную задачу и излагаются иначе.

Мы имѣли въ виду дать отчетливое, ясное, систематическое изложеніе ариѳметическихъ истинъ. Мы желали дать учащемуся тотъ итогъ, къ которому окончательно должны сводиться его ариѳметическія познанія, какимъ бы путемъ, какими бы пріемами они не пріобрѣтались имъ въ классѣ. Мы старались, такимъ образомъ, упростить задачу съ тѣмъ, чтобъ облегчить ея выполненіе.

Мы привели здѣсь только общія соображенія, которыми руководились; входить же въ подробное разсмотрѣніе всѣхъ особенностей нашего руководства мы считаемъ въ настоящую минуту неудобнымъ.

При литературной обработкѣ изложенія, мы постоянно старались сохранить полную соразмѣрность между словомъ и содержаніемъ.

Н. Бугаевъ.

Москва. 16 октября 1873 г.

Введенiе.

Предметы и явленiя бываютъ весьма разнообразны. При внимательномъ разсматриванiи мы замѣчаемъ въ нихъ сходство и различiе. Все то, въ чемъ предметы или явленiя сходны, или чѣмъ они отличаются другъ отъ друга, мы называемъ ихъ признаками, свойствами, качествами. Предметы могутъ отличаться другъ отъ друга размѣрами, вѣсомъ, цвѣтомъ, стоимостью, твердостью, продолжительностью своего существованiя и т. д.

Признаки предметовъ раздѣляются на *главные*, или *существенные*, и *второстепенные*, или *случайные*.

Предметы, сходные въ главныхъ признакахъ, называются *однородными*, а несходные въ главныхъ признакахъ—*разнородными*.

Разсматривать предметы съ цѣлью замѣтить ихъ взаимное сходство или различiе значитъ *сравнивать предметы*. Признаки и качества предметовъ тоже могутъ быть однородными и разнородными. Сравнивать можно не только предметы, но и качества или признаки ихъ.

I. Основныя ариѳметическія понятія.

§ 1. **Количество.** Сравнивая однородные признаки, мы замѣчаемъ, что они бываютъ развиты въ предметахъ не въ одинаковой степени: одинъ предметъ бываетъ длиннѣе, больше, тяжелѣе другого; одно явленіе продолжается долѣе другого. *Сравнивая однородные признаки, мы получаемъ понятіе о количествѣ.*

Количества бываютъ однородныя и разнородныя. Такъ, вѣсъ одного и вѣсъ другого тѣла будутъ количества однородныя, вѣсъ тѣла и его размѣры будутъ количества разнородныя.

§ 2. **Величина. Мѣра. Единица.** *Сравнивая однородныя количества, мы получаемъ понятіе о величинѣ.*

Имѣя нѣсколько однородныхъ величинъ, выбираютъ одну изъ нихъ и сравниваютъ съ нею остальныя величины.

Мѣра. *Величину, съ которою сравниваютъ другія однородныя величины, называютъ ихъ мѣрою.* Одну какую-нибудь мѣру условливаются считать постоянною и съ нею сравниваютъ всѣ остальныя величины того же рода.

Единица. *Постоянная мѣра, съ которою сравниваютъ всѣ однородныя съ нею величины, называется единицею. Измѣрять величину* значитъ сравнивать ее съ своею единицею.

Величина. *Величина есть все то въ предметѣ, что при своемъ измѣненіи можетъ быть измѣряемо.* Каждый родъ величинъ имѣетъ свою единицу. Для отличія различныхъ единицъ указываютъ, къ какому роду количествъ онѣ принадлежатъ. Ихъ называютъ единицами вѣса, времени, объема и т. д. Каждая изъ этихъ единицъ получаетъ особое названіе. Такъ, *часъ* есть единица времени, *аршинъ* — единица длины, *пудъ* — единица вѣса и т. д.

Наименованіе. Названія различныхъ единицъ называются ихъ *наименованіями*.

Однородныя единицы. Для измѣренія однородныхъ величинъ употребляютъ различныя единицы. Такъ, для измѣренія длины служатъ въ Россіи: *миля*, *верста*, *сажень*, *аршинъ*, *вершокъ*; для измѣренія времени служатъ: *годъ*, *сутки*, *часъ*, *минута*, *секунда*. — *Различныя единицы, служащія для измѣренія однородныхъ величинъ, называются однородными единицами.* Эти однородныя единицы бываютъ не одинаковой величины: миля болѣе версты, верста болѣе сажени и т. д. Притомъ, нѣсколько меньшихъ единицъ составляютъ одну большую: три аршина составляютъ сажень, пятьсотъ саженъ—версту, семь верстъ—милю.

Такимъ образомъ, однородныя единицы бываютъ болѣе или менѣе крупными. Если три аршина вмѣстѣ составляютъ одну сажень, то, обратно, чтобы получить аршинъ, нужно сажень разбить на три равныя части. Аршинъ составитъ, такимъ образомъ, часть сажени.

Часть единицы. Если единицу разбить на нѣсколько равныхъ частей, то величина, полученная такимъ образомъ, называется *частью единицы*. Часть единицы получаетъ особое названіе.

Такъ, когда мы разобьемъ аршинъ на четыре равныя части, каждая часть называется *четвертью*;

если его разбить на три равныя части, каждая часть называется *третью* аршина. Если аршинъ разбить на шестнадцать равныхъ частей, каждая часть называется *шестнадцатою* частію аршина, или *вершкомъ*. Части единицы называются также *долями*.

§ 3. **Число.** При сравненіи величины со своею единицею замѣчаютъ три случая: 1) когда величина болѣе своей единицы, 2) когда величина равна и 3) когда величина менѣе своей единицы.

Если величина болѣе своей единицы, при измѣреніи ея опредѣляютъ, сколько разъ единица повторяется, или сколько разъ она содержится въ данной величинѣ.

Если величина равна своей единицѣ, ее называютъ единицею.

Если величина менѣе единицы, ее сравниваютъ съ какою-нибудь частью единицы и опредѣляютъ, сколько разъ эта часть единицы содержится въ величинѣ. Такъ, напримѣръ, взявъ какую-нибудь длину, большую аршина, измѣряемъ ее аршиномъ и находимъ, что аршинъ содержится въ данной длинѣ ровно три раза. Въ этомъ случаѣ заключаютъ, что *данная длина равна тремъ аршинамъ*.

Измѣряя другую длину, меньшую аршина, находимъ, что ее можно получить, если мы разобьемъ аршинъ на четыре равныя части и эту часть повторимъ три раза. Въ этомъ случаѣ мы говоримъ: *данная длина составляетъ три четверти аршина.*

Измѣряя длину, мы получаемъ, такимъ образомъ, различные выводы: три аршина, три четверти аршина.

Число. *Выводъ, получаемый изъ сравненія величины со своею единицею, называется числомъ. Число есть результатъ измѣренія величины. Число есть отвѣтъ на вопросъ: сколько?*

§ 4. **Раздѣленіе чиселъ. Ариѳметика.** Числа бываютъ *цѣлыя* и *дробныя*. Число называется *цѣлымъ*, когда единица повторяется въ данной величинѣ ровно одинъ или нѣсколько разъ. Если для измѣренія величины нужно ее сравнивать съ частью единицы, число называется *дробнымъ*. *Три*, *четыре*, *семь* суть числа цѣлыя; *три четверти*, *половина*, *четверть* суть числа дробныя.

Цѣлое число. *Цѣлое число есть одна или нѣсколько единицъ, взятыхъ вмѣстѣ*, или, какъ обыкновенно выражаются, есть *одна единица*, *или совокупность нѣсколькихъ единицъ*.

Дробное число. *Дробное число, или дробь, есть одна или нѣсколько равныхъ частей единицы.*

Опредѣлить, сколько разъ какой-нибудь предметъ повторяется въ данной совокупности однородныхъ предметовъ, значитъ *считать предметы*. Считая предметы, мы всегда выражаемъ результатъ счета числомъ цѣлымъ.

Цѣлое число есть результатъ счета.

Числа раздѣляются также на *отвлеченныя* и *именованныя*.

Именованное число. Въ именованномъ числѣ мы обращаемъ вниманіе на значеніе или содержаніе единицъ. *Именованнымъ называется такое число, которое имѣетъ наименованіе*, напр., пять пудовъ, шесть дней. — Именованное число есть разультатъ измѣренія, выраженный въ единицахъ, однородныхъ съ измѣряемою величиною.

Отвлеченное число. Въ отвлеченномъ числѣ мы отвлекаемся отъ содержанія или значенія единицъ и обращаемъ вниманіе только на отношеніе величины къ своей единицѣ. *Отвлеченнымъ называется число, не имѣющее наименованія*, напр., семь, три четверти.

Ариѳметика. *Ариѳметика есть наука, въ которой излагаются правила составленія, изображенія чиселъ словами и знаками и основныя дѣйствія съ числами.*

Ариѳметика раздѣляется на 2 части: 1) на *ариѳметику цѣлыхъ* и 2) *ариѳметику дробныхъ чиселъ.*

Первая часть занимается цѣлыми числами, а вторая—дробными.

II. Нумерація.

§ 5. **Счетъ.** Производя счетъ предметовъ, мы перечисляемъ цѣлыя числа въ послѣдовательномъ порядкѣ. При этомъ отъ одного цѣлаго числа переходимъ къ слѣдующему большему числу, присоединяя каждый разъ единицу.

Число цѣлыхъ чиселъ. *Цѣлыхъ чиселъ безконечное множество*, ибо какъ бы ни было велико цѣлое число, всегда можно, присоединяя къ нему единицу, получить слѣдующее большее цѣлое число. Каждое изъ цѣлыхъ чиселъ должно имѣть особое названіе и особый знакъ для того, чтобъ его можно было отличить отъ другихъ чиселъ *словесно* и *письменно*.

Нумерація. *Та часть ариѳметики, которая излагаетъ правила составлять, выговаривать и изображать цѣлыя числа знаками, называется нумераціей, или счисленіемъ.*

Цѣлыхъ чиселъ безконечное множество. Если бы для обозначенія каждаго цѣлаго числа существовало отдѣльное слово, не было бы никакой возможности ихъ запомнить. Этого затрудненія избѣгаютъ, пользуясь особымъ способомъ словеснаго выраженія, который составляетъ предметъ словеснаго счисленія.

§ 6. **Словесное счисленіе.** *Словесное счисленіе есть способъ выражать цѣлыя числа немногими словами,* т. е. числомъ словъ, меньшимъ числа чиселъ. Этой цѣли достигаютъ при помощи очень простыхъ правилъ.

Первыя девять чиселъ имѣютъ особыя названія: *одинъ*, или *единица*, *два*, *три*, *четыре*, *пять*, *шесть*, *семь*, *восемь*, *девять*. Эти названія означаютъ въ то же время, сколько единицъ содержится въ числѣ. Если къ числу *девять* или къ девяти единицамъ присоединить еще единицу, образуется слѣдующее число *десять* или одинъ *десятокъ*. Десять десятковъ образуютъ вмѣстѣ число *сто*, или *сотню*. Десять сотенъ образуютъ *тысячу* и т. д.

Единицы различныхъ порядковъ. Въ ряду всевозможныхъ чиселъ заслуживаютъ особаго вниманія слѣдующія числа:

единица				
десять или *десятокъ*	состоитъ	изъ	десяти	единицъ
сто или *сотня*	„	„	„	десятковъ
тысяча	„	„	„	сотенъ
десять тысячъ или одинъ				

десятокъ тысячъ состоитъ изъ десяти тысячъ				
сто тысячъ или сотня тысячъ	„	„	„	десятк. тыс.
милліонъ	„	„	„	сотен. тыс.
десять милліоновъ	„	„	„	милліоновъ.
сто милліоновъ	„	„	„	десят. милл.

и т. д.

Числа: *одинъ, десять, сто, тысяча, десять тысячъ, сто тысячъ, милліонъ, десять милліоновъ* и т. д. называются *единицами перваго, второго, третьяго, четвертаго порядка* и т. д.

Единица перваго порядка называется также *простою единицею.* Каждую единицу слѣдующаго высшаго порядка мы образуемъ изъ десяти единицъ низшаго порядка. Всякая единица какого-нибудь порядка, будучи равна десяти единицамъ слѣдующаго порядка, составляетъ сто единицъ еще слѣдующаго низшаго порядка и т. д.

Такъ, напр., *десять тысячъ*—единица пятаго порядка составляетъ *десятокъ* тысячъ, то есть десять единицъ четвертаго порядка, *сто сотенъ*, то есть сто единицъ третьяго порядка и *тысячу десятковъ* или тысячу единицъ второго порядка.

§ 7. **Порядки чиселъ.** Числа, подобно единицамъ, также раздѣляются на порядки. Такъ, первыя девять чиселъ называютъ числами перваго порядка. Числа отъ десяти до ста называютъ числами второго порядка, отъ ста до тысячи—числами третьяго порядка и т. д.

Названія чиселъ. При помощи указанныхъ единицъ различнаго порядка мы получаемъ названія всѣхъ остальныхъ чиселъ. Такъ, числа, состоящія изъ одной, двухъ, трехъ... единицъ второго порядка, или, что то же, одного, двухъ, трехъ... десятковъ, мы называемъ: *десять*, *двадцать* (два десять), *тридцать*, *сорокъ*, *пятьдесять*, *шестьдесять*, *семьдесять*, *восемьдесять*, *девяносто*. Присоединяя къ этимъ числамъ девять чиселъ перваго порядка, мы получаемъ всѣ числа второго порядка. Такъ, присоединяя къ числу десять всѣ числа перваго порядка, мы получаемъ всѣ числа между десятью и двадцатью: *одиннадцать*, *двѣнадцать* (два на десять), *тринадцать*, *четырнадцать*, *пятнадцать*, *шестнадцать*, *семнадцать* *восемнадцать*, *девятнадцать*. Присоединяя къ двадцати девять чиселъ перваго порядка, получимъ всѣ числа между двадцатью и тридцатью: *двадцать одинъ*, *двадцать два* и т. д. Наибольшее число второго порядка есть *девяносто девять*.

Десять десятковъ образуютъ сотню или сто, единицу третьяго порядка. Числа, состоящія изъ одной или нѣсколькихъ единицъ третьяго порядка, мы называемъ: *сто*, *двѣсти*, *триста*, *четыреста*, *пятьсотъ*, *шестьсотъ*, *семьсотъ*, *восемьсотъ*, *девятьсотъ*.

Присоединяя къ этимъ числамъ всѣ числа перваго и второго порядка, мы получаемъ всѣ числа третьяго порядка, напр., восемьсотъ сорокъ пять, девятьсотъ четыре. Наибольшее число третьяго порядка есть *девятьсотъ девяносто девять*.

Десять сотъ образуютъ *тысячу* — единицу четвертаго порядка. Повторяя тысячу одинъ, два и т. д. разъ, образуемъ числа: *тысяча*, *двѣ тысячи*, *три тысячи* и т. д. Присоединяя къ этимъ числамъ всѣ числа перваго, второго и третьяго порядковъ, образуемъ всѣ числа четвертаго порядка и т. д.

Десятичная система. *Систему счисленія, въ которой каждыя десять единицъ низшаго образуютъ единицу слѣдующаго высшаго порядка, называютъ десятичною.* Она принята въ настоящее время всѣми образованными народами.

Основаніе системы. *Число десять называется основаніемъ системы.* Въ основѣ ея лежитъ число десять.

Полагаютъ, что число десять принято за основаніе потому, что первоначально люди считаютъ обыкновенно по пальцамъ.

Примѣръ. *Шесть милліоновъ пятьсотъ семь тысячъ двѣсти семь* есть число седьмого порядка. Оно состоитъ изъ шести единицъ седьмого порядка *(шесть милліоновъ)*, къ которому присоединено число шестого порядка *(пятьсотъ семь тысячъ двѣсти семь)*.

Число шестого порядка состоитъ изъ пяти единицъ шестого порядка *(пятьсотъ тысячъ)*, къ которому присоединено число четвертаго порядка *(семь тысячъ двѣсти семь)*.

Число четвертаго порядка состоитъ изъ семи единицъ четвертаго порядка *(семь тысячъ)*, къ которому присоединено число третьяго порядка *(двѣсти семь)*.

Число третьяго порядка состоитъ изъ двухъ единицъ третьяго порядка *(двѣсти)*, къ которому присоединяется число перваго порядка *(семь)*.

Число *семь* состоитъ изъ семи простыхъ единицъ.

Всякое число содержится между двумя единицами различныхъ порядковъ. Всякое число болѣе единицы одного порядка и менѣе единицы слѣдующаго высшаго порядка. Такъ, число *триста сорокъ семь* болѣе ста и менѣе тысячи.

§ 8. **Письменное счисленіе.** *Письменное счисленіе есть способъ изображать всѣ возможныя цѣлыя числа немногими знаками и выговаривать написанныя числа.*

Эти знаки называются цифрами.

Цифра. *Цифра есть условный знакъ, служащій для изображенія чиселъ.* Цифръ десять. Первыя девять цифръ изображаютъ первыя девять чиселъ:

1 ,	2 ,	3 ,	4 ,	5 ,	6 ,	7 ,	8 ,	9.
одинъ	два	три	четыре	пять	шесть	семь	восемь	девять

Онѣ называются *значащими* цифрами.

Нуль. Десятая цифра есть 0 (нуль). Знакъ этотъ не выражаетъ никакого числа, а указываетъ только на отсутствіе единицъ.

Мы знаемъ, что единицы бываютъ различныхъ порядковъ. При письменномъ изображеніи чиселъ эти единицы различныхъ порядковъ ставятъ на различныхъ мѣстахъ. Считая отъ правой руки къ лѣвой, ставятъ на

первомъ	мѣстѣ	*простыя единицы,*	или единицы	перваго	порядка
2-мъ	„	*десятки*	„	2-го	„
3-мъ	„	*сотни*	„	3-го	„
4-мъ	„	*тысячи*	„	4-го	„
5-мъ	„	*десятки тысячъ*	„	5-го	„
6-мъ	„	*сотни тысячъ*	„	6-го	„
7-мъ	„	*милліоны*	„	7-го	„
8-мъ	„	*десятки милліоновъ*	„	8-го	„
9-мъ	„	*сотни милліоновъ*	„	9-го	„
10-мъ	„	*тыс. мил.* (милліарды)		10-го	„

11-мъ мѣстѣ	*десят. тысячъ миллiон.*	11-го	порядка
12-мъ „	*сотни тысячъ миллiон.*	12-го	„
13-мъ „	*биллiоны*	13-го	„
14-мъ „	*десятки биллiоновъ*	14-го	„
15-мъ „	*сотни биллiоновъ*	15-го	„
16-мъ „	*тысячи биллiоновъ*	16-го	„
17-мъ „	*десят. тысячъ биллiоновъ*	17-го	„
18-мъ „	*сотни тысячъ биллiоновъ*	18-го	„
19-мъ „	*триллiоны*	19-го	„

и т. д.

Такимъ образомъ, каждая цифра будетъ имѣть разное значенiе, смотря по мѣсту, ею занимаемому.

Единицы различныхъ порядковъ изображаютъ слѣдующимъ образомъ:

единица	1
десять	10
сто	100
тысяча	1000
десять тысячъ	10000
сто тысячъ	100000
миллiонъ	1000000

Числа *двадцать, тридцать*... получатся, когда мы къ цифрамъ 2, 3, 4... приставимъ справа по нулю:

двадцать	20
тридцать	30
сорокъ	40

. . . . . .

Числа *двѣсти, триста*... получатся. когда къ цифрамъ 2, 3, 4... присоединимъ справа по два нуля.

Двѣсти	200
триста	300
четыреста	400
....	....

Числа двѣ тысячи, три тысячи... получатся, когда къ цифрамъ 2, 3, 4... присоединимъ справа по три нуля: 2000, 3000 и т. д.

Присоединяя справа нуль, мы тѣмъ самымъ повышаемъ порядокъ цифръ на единицу.

§ 9. Общія правила письменнаго счисленія. При изображеніи всѣхъ остальныхъ чиселъ нужно руководиться слѣдующими двумя правилами:

1. *Всякая цифра, стоящая слѣва какой-нибудь цифры, означаетъ единицы слѣдующаго высшаго порядка.*

2. *Если въ какомъ-нибудь порядкѣ нѣтъ единицъ, нужно на этомъ мѣстѣ ставить нуль.*

Руководясь этими правилами, легко написать вышеприведенное число: *шесть милліоновъ пятьсотъ семь тысячъ двѣсти семь единицъ.* Здѣсь шесть милліоновъ означаютъ 6 единицъ седьмого порядка, слѣд., *цифра 6 должна стоять на седьмомъ мѣстѣ отъ правой руки къ лѣвой.*

Пятьсотъ тысячъ составляютъ пять единицъ шестого порядка, слѣдовательно, *цифра 5 должна стоять на шестомъ мѣстѣ.*

Единицъ пятаго порядка вовсе нѣтъ, слѣдов., *на пятомъ мѣстѣ долженъ стоять 0.*

Семь тысячъ составляютъ семь единицъ четвертаго порядка, слѣд., *цифра 7 должна стоять на 4 мѣстѣ.*

Двѣсти составляютъ двѣ единицы третьяго порядка, слѣд., *цифра 2 должна стоять на 3 мѣстѣ.*

Десятковъ или единицъ второго порядка нѣтъ, слѣд., *на второмъ мѣстѣ долженъ стоять 0.*

Простыхъ единицъ семь, слѣдов., *на первомъ мѣстѣ должна стоять цифра 7.*

Принимая это въ соображеніе, данное число изображаютъ *письменно:*

6 5 0 7 2 0 7.

§ 10. Классы. Изображеніе чиселъ знаками значительно облегчается тѣмъ, что обыкновенно разбиваютъ числа на *классы*, отдѣляя для каждаго класса отъ правой руки къ лѣвой по шести порядковъ. Первый классъ называютъ *классомъ единицъ*, второй содержитъ *милліоны*, третій—*билліоны*, четвертый—*трилліоны* и т. д.

Грани. Каждый классъ дѣлятъ на *грани*, по три порядка въ каждой. Каждая грань состоитъ, такимъ образомъ, изъ трехъ цифръ. Считая отъ правой руки къ лѣвой, первую грань каждаго класса называютъ *гранью единицъ*, вторую—*гранью тысячъ.*

Первая грань содержитъ единицы, десятки, сотни; вторая—тысячи, десятки тысячъ и сотни тысячъ.

Такимъ образомъ, для изображенія всѣхъ чиселъ, нужно только умѣть писать числа, состоящія изъ трехъ цифръ. Для этого нужно только поставить рядомъ три цифры, при чемъ на первомъ мѣстѣ отъ правой руки къ лѣвой ставятъ цифру единицъ, на второмъ—цифру десятковъ, на третьемъ—цифру сотенъ, притомъ ставятъ нуль всякій разъ, когда недостаетъ какихъ-нибудь порядковъ.

Чтобы написать число, состоящее изъ четырехъ, пяти *или шести цифръ, нужно написать грань тысячъ и къ ней присоединить грань единицъ.*

§ 11. Правило изображенія чиселъ. *Чтобы написать всякое число, послѣдовательно изображаютъ всѣ классы, начиная съ высшаго. При этомъ наблюдаютъ, чтобы въ каждомъ классѣ, слѣдующемъ за высшимъ, содержалось по шести, а въ каждой его грани—по три цифры. Недостающіе классы, грани и порядки замѣняютъ нулями. Высшій классъ числа можетъ содержать менѣе шести, а высшая грань этого класса—менѣе трехъ цифръ.*

Примѣръ. Написать число: *сто тридцать трилліоновъ двадцать пять тысячъ билліоновъ триста семь тысячъ пять единицъ*. Число содержитъ четыре класса: трилліоны, билліоны, милліоны и единицы.

Въ классѣ трилліоновъ пишемъ 130, а въ классѣ билліоновъ двадцать пять тысячъ. Классъ билліоновъ долженъ содержать шесть цифръ, а для изображенія двадцати пяти тысячъ нужно только пять цифръ; грань тысячъ въ этомъ классѣ состоитъ изъ двухъ цифръ 25, слѣдовательно, въ грани тысячъ этого класса передъ цифрою 2 мы должны написать нуль, указывающій на отсутствіе порядка сотенъ тысячъ билліоновъ; въ грани единицъ класса билліоновъ нѣтъ вовсе единицъ, слѣдов., мы должны написать въ ней три нуля, и классъ билліоновъ приметъ видъ (025000).

За классомъ билліон. слѣдуетъ классъ милліоновъ.

Милліоновъ вовсе нѣтъ въ данномъ числѣ, слѣд., въ классѣ милліоновъ нужно написать шесть нулей (000000).

Затѣмъ въ классѣ единицъ, въ грани тысячъ должно стоять триста семь 307, а въ грани единицъ—цифра 5, предъ которой должны находиться два нуля, указывающіе на отсутствіе сотенъ и десятковъ. Классъ единицъ приметъ видъ (307005).

Такимъ образомъ, наше число изобразится письменно:

130|025,000|000,000|307,005.

Классы и грани обыкновенно отдѣляютъ запятыми.

Числа называются однозначными, двузначными, многозначными, смотря по тому, выражаются ли они одной, двумя или многими цифрами.

Однозначныя, двузначныя... суть тѣ самыя числа, которыя мы называли числами перваго, второго порядка и т. д.

§ 12. **Выговариваніе чиселъ.** Въ вышеизложенныхъ правилахъ для изображенія чиселъ заключаются правила для ихъ выговариванія.

Правило выговариванія чиселъ. *Чтобы выговорить какое, нибудь число, нужно предварительно разбить его на классы, а классы—на грани, отдѣляя запятою отъ правой руки къ лѣвой по шести цифръ для каждаго класса и по три цифры—для каждой грани. Послѣдній классъ можетъ содержать менъе шести, и послѣдняя грань—менъе трехъ цифръ. Затѣмъ нужно выговариватъ каждый классъ отдѣльно, присоединяя въ концѣ класса его названіе. Въ каждомъ классѣ послѣ первой грани также присоединяется ея названіе.*

Примѣръ. Выговорить число

1,702|067,020|340,058.

Здѣсь три класса:
Классъ билліоновъ: 1,702
Классъ милліоновъ: 067,020
Классъ единицъ: 340,058

Данное число выговариваютъ такъ: тысяча семьсотъ два *билліона,* шестьдесятъ семь тысячъ двадцать *милліоновъ,* триста сорокъ тысячъ пятьдесятъ восемь *единицъ.*

Десятичная система изображенія чиселъ называется также *арабскою,* ибо этотъ способъ изображенія чиселъ европейцы заимствовали у арабовъ. Цифры также называются *арабскими.* Для изображенія чиселъ, кромѣ арабскихъ, существуютъ знаки славянскіе и римскіе.

См. Краткія историческія свѣдѣнія о нумераціи. Прибавленіе § 54.

Въ десятичной системѣ взято за основаніе число 10. Можно изображать числа и при другихъ основаніяхъ.

См. Письменное счисленіе при различныхъ основаніяхъ. Приб. § 56.

III. Основныя ариѳметическія дѣйствія съ цѣлыми числами.

Предварительныя понятія объ ариѳметическихъ дѣйствіяхъ.

§ 13. По двумъ или нѣсколькимъ цѣлымъ числамъ можно составить новое цѣлое число. Способовъ составлять новое цѣлое число очень много. Такъ, по двумъ цѣлымъ числамъ 6 и 2 можно составить новое число различнымъ образомъ.

1. *Можно по двумъ числамъ 6 и 2 составить такое*

число, которое будетъ заключать въ себѣ столько единицъ, сколько ихъ содержится въ обоихъ числахъ. Такое число есть 8.

Въ этомъ случаѣ число 8 равно обоимъ числамъ, взятымъ вмѣстѣ.

2. *Можно по числамъ 6 и 2 составить такое число, которое будетъ показывать, насколько единицъ число 6 болѣе 2*, или, какъ обыкновенно выражаются, *чѣмъ число 6 болѣе 2.* Такое число есть 4.

3. *Можно по 6 и 2 составить число, которое будетъ показывать, сколько единицъ получимъ, если число 6 повторимъ 2 раза.* Такое число есть 12.

4. *Можно по 6 и 2 составить такое число*, *которое показываетъ*, *сколько разъ 2 содержится въ 6.* Число два называютъ парой, слѣд., новое число будетъ показывать, сколько паръ содержится въ 6, или сколько паръ содержитъ число 6. Такое число есть 3. Оно показываетъ, *во сколько разъ* 6 болѣе 2.

Такимъ образомъ, по двумъ числамъ 6 и 2 разными способами мы составили 4 новыхъ числа: 8, 4, 12 и 3.

Ариѳметическое дѣйствіе. *Способъ составлять новое число по двумъ или нѣсколькимъ числамъ называется ариѳметическимъ дѣйствіемъ.*

Данныя и искомыя. Тѣ числа, по которымъ составляютъ новое число, всегда даются и называются *данными числами,* а число новое, которое составляется по даннымъ, называется *искомымъ*, ибо цѣль ариѳметическаго дѣйствія состоитъ въ томъ, чтобы отыскать его. Искомое число называютъ также результатомъ дѣйствія.

§ 14. Основныя ариѳметическія дѣйствія. Вообще ариѳметическихъ дѣйствій много, но основныхъ только четыре: *сложеніе*, *вычитаніе*, *умноженіе* и *дѣленіе*. Они названы основными, ибо всѣ остальныя дѣйствія приводятся къ нимъ.

1. По двумъ числамъ 6 и 2 найти число 8, равное двумъ числамъ, взятымъ вмѣстѣ, значитъ *сложить два числа*. Самое дѣйствіе называется *сложеніемъ*, и связь между тремя числами выражаютъ словесно:

6 да 2 составляютъ 8.

2. По двумъ числамъ 6 и 2 найти число 4, показывающее, чѣмъ число 6 болѣе 2, значитъ 2 отнять отъ 6. Отнять 2 отъ 6 значитъ *вычесть 2 изъ 6*. Самое дѣйствіе называется *вычитаніемъ*. Связь между тремя числами выражаютъ словесно:

6 безъ 2 составляетъ 4.

3. По двумъ числамъ 6 и 2 составить 12 или иначе повторить 6 два раза, значитъ *умножить 6 на 2*. Дѣйствіе называется *умноженіемъ*. Связь между числами 6, 2 и 12 выражаютъ словесно:

6, повторенное 2 раза, составляетъ 12, или

6, умноженное на 2, составляетъ 12.

4. По двумъ числамъ 6 и 2 составить число 3, указывающее, сколько разъ 6 содержитъ число 2, значитъ *6 раздѣлить на 2*. Дѣйствіе называется *дѣленіемъ*. Связь между числами 6, 2 и 3 выражаютъ словесно:

6 содержитъ число два 3 раза, или

6, дѣленное на 2, составляетъ 3.

Знакъ равенства. Слово: *составляетъ* замѣняютъ знакомъ =, который называется *знакомъ равенства*, ибо это слово можетъ быть замѣнено словомъ *равно*.

— Равенство. Совокупность равныхъ чиселъ по обѣ стороны знака = называется *равенствомъ*.

Четыре ариѳметическія дѣйствія надъ двумя числами могутъ быть выражены словами:

6 да 2=8

6 безъ 2=4

6 умноженное на 2=12

6 дѣленное на 2=3.

Во всѣхъ этихъ дѣйствіяхъ 6 и 2 суть числа *данныя*, а 8, 4, 12 и 3—числа *искомыя*.

Знаки основныхъ дѣйствій. Слова: *да*, *безъ*, *умноженное*, *дѣленное*, замѣняютъ особыми знаками: слово *да*—знакомъ + (плюсъ)
слово *безъ*—знакомъ — (минусъ)
слово *умноженное (повторенное)*—знакомъ × или . (точкою), слово *дѣленное*—знакомъ :

Замѣняя слова знаками, мы можемъ зависимость между числами выразить письменно:

$6+2=\ 8$ (сложеніе)

$6-2=\ 4$ (вычитаніе)

$6\times 2=12$ (умноженіе)

$6:2=\ 3$ (дѣленіе)

Знаки + и — были введены Родольфи (Rodolphi) въ 1522 году, знакъ × ввелъ англичанинъ Отредъ (Oughtred) въ 1631 г., знакъ = ввелъ англійскій геометръ Рекоръ (Recort) въ 1552 г. (см. 32 стр., 49 стр.)

Сложеніе.

§ 15. Опредѣленіе. *Сложеніе есть такое дѣйствіе, въ которомъ по двумъ или нѣсколькимъ числамъ находится число, равное всѣмъ имъ, взятымъ вмѣстѣ.*

Сложеніе есть соединеніе двухъ или нѣсколькихъ чиселъ въ одно.

Данныя и искомыя. Данныя числа въ сложеніи называются *слагаемыми*, а искомое—*суммою*.

Сумма заключаетъ въ себѣ столько единицъ, сколько ихъ содержится во всѣхъ слагаемыхъ.

При сложеніи двухъ чиселъ одно число увеличивается *на столько* единицъ, сколько ихъ содержится въ другомъ числѣ. Сложить одно число съ другимъ значитъ *прибавить* одно число къ другому.

Знакъ сложенія. Дѣйствіе сложенія обозначается знакомъ + (плюсъ).

Сложеніе однозначныхъ чиселъ. Чтобы обозначить, что нужно сложить числа 2, 7, 8, 9, 6, пишутъ эти числа рядомъ, помѣщая между ними знакъ сложенія +.

$2+7+8+9+6.$

Для сложенія прибавляютъ къ первому числу второе, затѣмъ къ полученному результату прибавляютъ третье число и т. д., до послѣдняго числа.

Самый ходъ вычисленія выражаютъ *письменно*:

$2+7+8+9+6=32,$

словесно:

2 да 7 составляютъ 9, 9 да 8 составляютъ семнадцать, 17 да 9—двадцать шесть, 26 да 6—*тридцать два*.

Числа 2, 7, 8, 9, 6 суть слагаемыя, а число 32 есть сумма.

Основное свойство суммы. Сумма не измѣнится, если мы сложимъ тѣ же числа въ другомъ порядкѣ, ибо въ этомъ случаѣ сумма будетъ содержать тѣ же самыя единицы, слѣдов., *сумма не измѣняется отъ перемѣны порядка слагаемыхъ.*

На этомъ свойствѣ суммы основываются всѣ правила сложенія.

§ 16. **Сложеніе многозначныхъ чиселъ.** Чтобъ означить, что нужно сложить нѣсколько многозначныхъ чиселъ, 2302, 495, 30, обыкновенно пишутъ:

2302+495+30.

Мы можемъ разсматривать каждое число состоящимъ изъ единицъ, десятковъ, сотенъ и т. д. Зная, что сумма не измѣняется отъ перемѣны порядка слагаемыхъ, мы можемъ отдѣльно складывать между собою единицы съ единицами, десятки съ десятками, сотни съ сотнями и т. д.

Чтобъ облегчить сложеніе, подписываютъ слагаемыя числа одно подъ другимъ такъ, чтобы единицы стояли подъ единицами, десятки подъ десятками и т. д., то-есть, чтобы цифры одинаковыхъ порядковъ находились въ одномъ вертикальномъ столбцѣ. Затѣмъ проводимъ черту, чтобъ отдѣлить слагаемыя отъ суммы.

Въ нашемъ примѣрѣ числа должны быть написаны такъ:

$$\begin{array}{r} 2302 \\ 495 \\ 30 \\ \hline \end{array}$$

Ходъ вычисленія выражается *словесно:*

а) *Начинаемъ сложеніе съ единицъ:*

2 да 5 составляютъ семь; подписываемъ подъ единицами 7.

b) *Складываемъ десятки:*

9 да 3 составляютъ 12; 12 десятковъ составляютъ одну сотню и 2 десятка; подписываемъ подъ десятками цифру 2, а единицу прибавляемъ къ сотнямъ, надписывая ее надъ сотнями, или какъ обыкновенно выражаются: *замѣчаемъ ее въ умѣ.*

c) *Складываемъ сотни:*

1 (въ умѣ) да 3 составятъ 4, 4 да 4 составляютъ 8; подписываемъ подъ сотнями 8.

d) *Складывая тысячи*, получаемъ 2.

Самое дѣйствіе выразится *письменно:*

$$\begin{array}{rl} \scriptstyle 1 & \text{— цифры, замѣчаемыя въ умѣ.} \\ 2302 & \\ 495 & \left.\right\} \text{ слагаемыя.} \\ 30 & \\ \hline 2827 & \text{ сумма} \end{array}$$

Примѣръ. Складывая числа $3275+41297+135+97$, имѣемъ:

$$\begin{array}{rl} \scriptstyle 32 & \text{— цифры, замѣчаемыя въ умѣ.} \\ 3275 & \\ 41297 & \\ 135 & \\ 97 & \\ \hline 44804 & \end{array}$$

Изъ предыдущихъ примѣровъ выводимъ

Правило сложенія: A) *Чтобъ сложить цѣлыя числа, нужно подписать слагаемыя одно подъ другимъ* *такъ, чтобъ единицы одиниковыхъ порядковъ стояли въ одномъ вертикальномъ столбцѣ, то-есть, единицы подъ единицами, десятки подъ десятками, сотни подъ сотнями и т. д., провести черту и отдѣлить такимъ образомъ слагаемыя отъ суммы.*

B) *Сложеніе нужно начинать съ простыхъ единицъ, то-есть, съ перваго столбца, и затѣмъ, переходя отъ правой руки къ лѣвой къ слѣдующимъ столбцамъ, складываютъ десятки съ десятками, сотни съ сотнями и т. д.*

C) *Если при сложеніи простыхъ единицъ получится въ суммѣ 9 или число менѣе 9, нужно подписывать его подъ столбцомъ единицъ. Если же въ суммѣ получится число болѣе 9, цифру единицъ подписываютъ подъ столбцомъ единицъ, а число, выражающее десятки, присоединяютъ къ слѣдующему столбцу.*

D) *При сложеніи столбца десятковъ нужно поступать подобнымъ же образомъ и продолжать сложеніе, пока не получимъ полной суммы.*

Вычитаніе.

§ 17. Вычесть значитъ отнять одно число отъ другого.

Опредѣленіе. *Вычитаніе есть такое дѣйствіе, въ которомъ отнимаютъ меньшее число отъ большаго.* При вычитаніи цѣлыхъ чиселъ большее число уменьшается *на столько* единицъ, сколько ихъ содержится въ меньшемъ. Вычесть одно число изъ другого значитъ *убавить* одно число другимъ, поэтому *вычитаніе есть дѣйствіе обратное сложенію.*

Данныя и искомыя. Въ вычитаніи два данныхъ числа называются *уменьшаемымъ и вычитаемымъ*, а искомое—*остаткомъ* или *разностью.*

Уменьшаемое. *Уменьшаемымъ называютъ большее число, отъ котораго отнимаютъ другое.* Оно уменьшается отъ вычитанія.

Вычитаемое. *Вычитаемымъ называютъ меньшее число, которое отнимаютъ отъ большаго.*

Остатокъ. *Остаткомъ* или *разностью называютъ выводъ, получаемый отъ вычитанія.* Остатокъ опредѣляетъ, *чѣмъ* одно число больше другого или показываетъ разницу между двумя числами.

Знакъ вычитанія. Дѣйствіе вычитанія обозначается знакомъ—(минусъ).

Вычитаніе однозначныхъ чиселъ. Чтобъ обозначить, что изъ 9 нужно вычесть 6, пишутъ эти числа рядомъ, отдѣляя ихъ знакомъ—(минусъ).

9—6.

Разность между этими числами будетъ 3, и ходъ вычисленія выражаютъ *словесно:*
девять безъ шести равно тремъ.
письменнѣ:

9—6=3.

Большее число 9 будетъ уменьшаемымъ, меньшее 6 вычитаемымъ, число 3 остаткомъ.

Способы вычитанія. Можно двумя способами вычесть одно число изъ другого:

А) или можно отнять отъ большаго числа столько единицъ, сколько ихъ содержится въ меньшемъ. Такъ, изъ 9 вычесть 6 значитъ отъ 9 отнять 6. Число 3 будетъ искомый остатокъ;

В) или можно къ меньшему числу прибавлять по единицѣ до тѣхъ поръ, пока не получимъ бо́льшаго числа. Такъ, вычитая 6 изъ 9, мы къ 6 прибавляемъ 3 единицы. Число единицъ, которое нужно прибавить къ меньшему числу, чтобъ уравнять его съ большимъ, опредѣляетъ остатокъ. Меньшее число съ остаткомъ должно равняться большему числу, слѣд., меньшее число и остатокъ суть слагаемыя, а большее — ихъ сумма. На этомъ основано

Другое опредѣленіе вычитанія: *Вычитаніе есть такое дѣйствіе, въ которомъ по данной суммѣ и одному слагаемому отыскиваютъ другое слагаемое.*

Въ этомъ случаѣ *данная сумма есть уменьшаемое, данное слагаемое — вычитаемое, а искомый остатокъ — другое слагаемое.*

§ 18. **Вычитаніе многозначныхъ чиселъ.** Вычитаніе многозначныхъ чиселъ основывается на томъ свойствѣ чиселъ, по которому *вычесть число все равно, что вычесть всѣ его части.* Изъ этого свойства видно, что вычесть какое-нибудь число все равно, что вычесть послѣдовательно всѣ его единицы, десятки, сотни и т. д. Чтобъ обозначить, что изъ числа 7228 нужно вычесть 3517, пишутъ:

$$7228-3517$$

и вычитаютъ отдѣльно единицы изъ единицъ, десятки изъ десятковъ и т. д.

Чтобъ облегчить вычитаніе, подписываютъ меньшее число подъ большимъ такъ, чтобъ единицы одинаковыхъ порядковъ находились въ одномъ вертикальномъ столбцѣ. проводятъ черту, слѣва ставятъ знакъ вычитанія — и подъ чертою подписываютъ остатокъ.

Ходъ вычисленія выражаютъ *словесно:*

a) *Начинаемъ вычитаніе съ простыхъ единицъ:*

8 безъ 7 составляютъ 1; подписываютъ подъ единицами 1.

b) *Вычитаемъ десятки:*

2 безъ 1 даютъ 1, подписываемъ подъ десятками 1.

c) *Вычитаемъ сотни:*

Пять нельзя вычесть изъ 2, поэтому занимаемъ у слѣдующаго высшаго порядка (тысячъ) единицу, что и обозначаемъ тѣмъ, что надъ 7 ставимъ точку. Единица каждаго порядка содержитъ 10 единицъ слѣдующаго меньшаго порядка.

Присоединяя эти 10 единицъ къ 2, получимъ 12; 12 безъ 5 составляютъ 7, подписываемъ подъ сотнями 7.

Когда занимаютъ единицу у высшаго порядка, обозначаютъ это тѣмъ, что ставятъ точку надъ порядкомъ, у котораго занимаютъ.

d) *Вычитаемъ тысячи:*

Тысячъ осталось вмѣсто 7 только 6, ибо одна была взята.

6 безъ 3 составляютъ 3; подписываемъ подъ тысячами 3.

Ходъ вычисленія выражаютъ *письменно:*

$$\begin{array}{rl} \dot{7}228 & \text{уменьшаемое} \\ -3517 & \text{вычитаемое} \\ \hline 3711 & \text{остатокъ.} \end{array}$$

Примѣръ. Изъ 17004 вычесть 6025.

$$\begin{array}{r} \dot{1}\dot{7}004 \\ -\ 6025 \\ \hline 10979 \end{array}$$

Изъ 4 нельзя вычесть 5. Занимаемъ единицу у десятковъ, слѣдующаго высшаго порядка, но въ этомъ порядкѣ единицъ нѣтъ; занимаемъ у сотенъ, — и сотенъ нѣтъ; занимаемъ у тысячъ и обозначаемъ это точкой надъ цифрою 7.

Единица четвертаго имѣетъ 10 единицъ третьяго порядка. Взявъ изъ нихъ одну для десятковъ, оставляемъ ихъ въ сотняхъ только 9. Присоединяя 10 къ 4, имѣемъ 14.

Производя вычитаніе, получимъ:

для единицъ	14	безъ	5=9
„ десятковъ	9	—	2=7
„ сотенъ	9	—	0=9
„ тысячъ	6	—	6=0

Для десятковъ тысячъ имѣемъ 1, ибо эту цифру уменьшаемаго переносимъ въ разность безъ измѣненія.

Ходъ вычисленія выразится *письменно:*

$$\begin{array}{r} 1\dot{7}\dot{0}\dot{0}4 \\ -\ 6025 \\ \hline 10979 \end{array}$$

Изъ предыдущихъ примѣровъ выводимъ

Правило вычитанія: А. *Чтобы сдѣлать вычитаніе цѣлыхъ чиселъ, нужно вычитаемое подписать подъ уменьшаемымъ такъ, чтобы единицы одинаковыхъ порядковъ стояли въ одномъ вертикальномъ столбцѣ, провести черту, подъ которою и подписываютъ разность.*

B) *Вычитаніе нужно начинать съ простыхъ единицъ, то-есть съ перваго столбца, и затѣмъ, переходя къ слѣдующимъ столбцамъ отъ правой руки къ лѣвой, вычитаютъ десятки изъ десятковъ, сотни изъ сотенъ и т. д.*

C) *Если цифра вычитаемаго менѣе цифры уменьшаемаго, разность подписываютъ въ томъ же столбцѣ; если цифры равны, разность будетъ нуль. Если же цифра вычитаемаго болѣе соотвѣтствующей цифры уменьшаемаго, занимаютъ единицу у слѣдующаго порядка уменьшаемаго, отмѣчая это точкой, поставленной надъ цифрой, у которой занимаютъ, прикладываютъ 10 къ цифрѣ уменьшаемаго и производятъ вычитаніе. Цифру же съ точкой считаютъ на единицу меньше.*

D) *Если при вычитаніи цифра уменьшаемаго, у которой занимаютъ, будетъ 0, за которымъ въ уменьшаемомъ слѣдуютъ тоже нули, то занимаютъ у первой значащей цифры, ставя надъ нею и всѣми промежуточными нулями точки. Цифру съ точкой считаютъ на единицу меньше, а нули съ точкою считаютъ за 9.*

E) *Вычитаніе продолжаютъ до тѣхъ поръ, пока не получатъ полной разности.*

F) *Лишнія цифры уменьшаемаго переносятъ въ разность.*

Примѣры: 1)

$$\begin{array}{r} \dot{2}\dot{3}\dot{0}\dot{0}\dot{0}756 \\ -\ 4290845 \\ \hline 18709911 \end{array}$$

2)

$$\begin{array}{r} \dot{6}1\dot{5}0\dot{8}\dot{3}25 \\ -14270394 \\ \hline 47237931 \end{array}$$

§ 19. **Зависимость между данными и искомыми вычитанія.**

Изъ примѣра $9 - 6 = 3$ видно, что

a) *Уменьшаемое равно вычитаемому, сложенному съ остаткомъ.*

$$9 = 6 + 3$$

b) *Вычитаемое равно уменьшаемому безъ остатка.*

$$6 = 9 - 3$$

c) *Остатокъ равенъ уменьшаемому безъ вычитаемаго.*

$$3 = 9 - 6$$

Ариѳметическое дополненіе. Разность между числомъ и ближайшею большею единицею называется *ариѳметическимъ дополненіемъ.* Такъ, ариѳметическими дополненіями чиселъ 7, 79, 983 будутъ числа:

$$10 - 7 = 3$$
$$100 - 79 = 21$$
$$1000 - 983 = 17$$

Ариѳметическимъ дополненіемъ иногда пользуются для облегченія ариѳметическихъ вычисленій.

Умноженіе.

§ 20. Умножить одно цѣлое число на другое значитъ повторить одно число столько разъ, сколько въ другомъ содержится единицъ. Повторить число значитъ взять его слагаемымъ нѣсколько разъ и опредѣлить сумму.

Опредѣленіе. *Умноженіе цѣлыхъ чиселъ есть такое дѣйствіе, въ которомъ нужно взять одно число слагаемымъ столько разъ, сколько въ другомъ содержится единицъ, и найти сумму этихъ слагаемыхъ.*

Умножить 7 на 3 значитъ взять число 7 слагаемымъ три раза и найти сумму:

$$7+7+7$$

Искомая сумма есть 21.

Умноженіе есть сложеніе равныхъ слагаемыхъ.

Данныя и искомыя. Данныя въ умноженіи называются *множимымъ и множителемъ*, а искомое—*произведеніемъ.*

Въ предложенномъ примѣрѣ данныя будутъ множимое 7, множитель 3, а искомымъ произведеніемъ 21.

Множимое. *Множимое есть то число, которое умножается или повторяется слагаемымъ. Множимое выражаетъ величину равныхъ слагаемыхъ.*

Множитель. *Множитель показываетъ, сколько разъ множимое повторяется слагаемымъ. Множитель показываетъ число равныхъ слагаемыхъ.*

Произведеніе. *Произведеніе есть число, которое получается отъ умноженія. Оно есть сумма равныхъ слагаемыхъ.*

Производители. Множимое и множитель вмѣстѣ называются *производителями.*

При умноженіи цѣлыхъ чиселъ одно число увеличивается *во столько разъ*, сколько въ другомъ содержится единицъ.

Знакъ умноженія. *Дѣйствіе умноженія обозначаютъ знакомъ × (косвеннымъ крестомъ) или . (точкою). Знакъ умноженія ставится между производителями.*

Повторить число 7 три раза слагаемымъ и найти сумму значитъ 7 умножить на 3. Вмѣсто того, чтобы писать

$$7+7+7,$$

пишутъ при помощи знака умноженія короче:

$$7\times3 \text{ или } 7.3$$

Умноженіе есть сокращенное сложеніе равныхъ слагаемыхъ.

англичаниномъ

Знакъ (×) былъ введенъ Отредомъ (1631 г.), а знакъ . Христіаномъ Вольфомъ (1752 г.).

Связь между данными и искомымъ числомъ выражается въ умноженіи

письменно:

$$7 \times 3 = 21 \text{ или } 7 \,.\, 3 = 21$$

словесно:

семь, умноженное на три, составляетъ 21.

Чтобы составить произведеніе 21, нужно 7 повторить три раза

$$21 = 7 + 7 + 7$$

Чтобы составить множителя 3, нужно единицу повторить три раза

$$3 = 1 + 1 + 1$$

Отсюда имѣемъ

Другое опредѣленіе умноженія: *Умноженіе есть такое дѣйствіе, въ которомъ произведеніе точно такъ же составляется изъ множимаго, какъ множитель составленъ изъ единицы.*

Основное свойство произведенія. *Произведеніе не измѣняется отъ перемѣны порядка производителей.*

Доказательство. Умножить 7 на 3 значитъ 7 повторить три раза. Замѣнивъ 7 суммою 7 единицъ и сложивъ ихъ въ вертикальномъ порядкѣ, имѣемъ:

$$\begin{array}{r} 7 = 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 \\ 7 = 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 \\ \underline{7 = 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1} \\ 7 + 7 + 7 = 3 + 3 + 3 + 3 + 3 + 3 + 3 \end{array}$$

то-есть $7 \times 3 = 3 \times 7.$

Такимъ образомъ, при умноженіи двухъ чиселъ мы можемъ считать множителемъ любого изъ двухъ производителей. На этомъ основаніи производители называются *сомножителями* или просто *множителями.*

Самый общій пріемъ умноженія состоитъ въ сложеніи равныхъ слагаемыхъ; но, если производители велики, этотъ пріемъ приводитъ къ длиннымъ вычисленіямъ, поэтому самое вычисленіе располагаютъ иначе.

§ 21. **Умноженіе однозначныхъ чиселъ. Пиѳагорова таблица.** Чтобъ умножить два однозначнымъ числа, нужно повторить одно число слагаемымъ столько разъ, сколько въ другомъ содержится единицъ, и найти ихъ сумму. Такъ какъ умноженіе цѣлыхъ чиселъ приводится къ умноженію однозначныхъ чиселъ, то составляютъ таблицу произведеній всѣхъ однозначныхъ чиселъ попарно. Такая таблица всѣхъ произведеній однозначныхъ чиселъ попарно называется *таблицей умноженія.*

Пиѳагорова таблица. Изобрѣтеніе ея приписываютъ греческому философу Пиѳагору *), по имени котораго ее называютъ *Пиѳагоровой таблицей.*

Чтобы составить эту таблицу, нужно написать первыя 9 чиселъ въ горизонтальной строкѣ:

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9.

Затѣмъ подъ этой строкой нужно подписать рядъ чиселъ, выражающій произведенія этихъ чиселъ на 2. Этотъ рядъ чиселъ получится, когда въ первой строкѣ

*) Пиѳагоръ родился около 569 года до Р. Х.

сложимъ каждое число само съ собою. Отъ второй строки чиселъ послѣдовательно переходимъ къ 3, 4 и т. д., изображающей произведенія чиселъ первой горизонтальной строки на 3, на 4 и т. д. Каждая последующая строка получается изъ предыдущей чрезъ прибавленіе къ ней чиселъ первой строки.

Продолжая такъ поступать до 9 строки, мы получимъ Пиѳагорову таблицу въ слѣдующемъ видѣ:

ПИѲАГОРОВА ТАБЛИЦА.

1	2.	3	4	5	6	7	8	9
2	4	6	8	10	12	14	16	18
3	6	9	12	15	18	21	24	27
4	8	12	16	20	24	28	32	36
5	10	15	20	25	30	35	40	45
6	12	18	24	30	36	42	48	54
7	14	21	28	35	42	49	56	63
8	16	24	32	40	48	56	64	72
9	18	27	36	45	54	63	72	81

Чтобы по этой таблицѣ найти произведеніе двухъ однозначныхъ чиселъ, нужно отыскать одного производителя въ первой горизонтальной строкѣ, а другого въ первомъ вертикальномъ столбцѣ; тогда искомое произведеніе будетъ на пересѣченіи соотвѣтствующихъ столбца и строки. Такимъ образомъ, произведеніе $6 \times 7 = 42$ находится на пересѣченіе 6-й строки и 7-го столбца. Произведеніе нуля на число и числа на нуль всегда даетъ нуль.

Такъ какъ произведеніе однозначнаго числа на 1 даетъ самое число и перемѣна порядка производителей не измѣняетъ произведенія, то всѣ различныя произведенія двухъ однозначныхъ чиселъ, на которыя слѣдуетъ обратить вниманіе, заключаются въ слѣдующей таблицѣ:

$2 \times 2 = 4$	$4 \times 4 = 16$	$7 \times 7 = 49$
$2 \times 3 = 6$	$4 \times 5 = 20$	$7 \times 8 = 56$
$2 \times 4 = 8$	$4 \times 6 = 24$	$7 \times 9 = 63$
$2 \times 5 = 10$	$4 \times 7 = 28$	—
$2 \times 6 = 12$	$4 \times 8 = 32$	$8 \times 8 = 64$
$2 \times 7 = 14$	$4 \times 9 = 36$	$8 \times 9 = 72$
$2 \times 8 = 16$	—	—
$2 \times 9 = 18$	$5 \times 5 = 25$	$9 \times 9 = 81$
—	$5 \times 6 = 30$	—
	$5 \times 7 = 35$	
$3 \times 3 = 9$	$5 \times 8 = 40$	
$3 \times 4 = 12$	$5 \times 9 = 45$	
$3 \times 5 = 15$	—	
$3 \times 6 = 18$	$6 \times 6 = 36$	
$3 \times 7 = 21$	$6 \times 7 = 42$	
$3 \times 8 = 24$	$6 \times 8 = 48$	
$3 \times 9 = 27$	$6 \times 9 = 54$	
—	—	

Произведенія однозначпыхъ чиселъ, не содержащіяся въ этой таблицѣ, получаются по даннымъ, если только измѣнить въ нихъ порядокъ производителей; такимъ образомъ, $9\times4=4\times9=36$.

§ 22. **Умноженіе многозначнаго числа на однозначное** Умноженіе числа 8094 на 3 означаютъ тѣмъ, что подписываютъ множителя подъ множимымъ, ставятъ слѣва знакъ умноженія и проводятъ черту съ тѣмъ, чтобъ отдѣлить произведеніе.

$$\begin{array}{r} 8094 \\ \times\,3 \\ \hline \end{array}$$

Умпожить многозначное число 8094 на 3 значитъ найти сумму трехъ равныхъ слагаемыхъ

$$\begin{array}{r} 8094 \\ 8094 \\ 8094 \\ \hline 24282 \end{array}$$

слѣдовательно, для умноженія нужно всѣ порядки многозначнаго числа повторить три раза, то-есть умножить на 3 единицы, десятки, сотни, и т. п. Сложеніе начинаютъ съ единицъ, слѣд., и умноженіе нужно начинать съ единицъ, а затѣмъ переходятъ отъ правой руки къ лѣвой къ единицамъ высшаго порядка.

При этомъ ходъ вычисленія выражаютъ *словесно*:

а) *начинаемъ умноженіе съ единицъ*:

3×4 составляютъ 12, подписываемъ подъ единицами 2, а единицу (1 десятокъ) прикладываемъ къ произведенію слѣдующаго порядка на множителя (или замѣчаемъ ее въ умѣ).

b) *Умножаемъ десятки:*

3×9 составляетъ 27, да 1 въ умѣ составятъ 28; подписываемъ подъ десятками 8 и 2 въ умѣ.

c) *Умножаемъ сотни:*

Нуль, умноженный на 3, даетъ нуль, да 2 въ умѣ составитъ 2, подписываемъ подъ сотнями 2.

d) *Умножаемъ тысячи:*

3×8=24, подписываемъ вполнѣ 24, ибо не имѣемъ слѣдующихъ порядковъ.

Самое дѣйствіе выразится *письменно:*

21 цифры, замѣчаемыя въ умѣ.

$$\begin{array}{rl} 8094 & \text{множимое.} \\ \times 3 & \text{множитель.} \\ \hline 24282 & \text{произведеніе.} \end{array}$$

Изъ предыдущаго примѣра выводимъ

Правило: *Чтобы умножить многозначное число на однозначное, нужно:*

A) *Подписать множителя подъ единицами множимаго, поставить слѣва знакъ умноженія и провести черту.*

B) *Умноженіе начинать съ простыхъ единицъ, затѣмъ, переходя отъ правой руки къ лѣвой, послѣдовательно умножаютъ десятки, сотни, тысячи и т. д.*

C) *Если при умноженіи произведеніе выражается однозначнымъ числомъ, то его подписываютъ подъ умножаемой цифрой множимаго.*

D) *Если же произведеніе выражается двузначнымъ числомъ, то цифру единицъ подписываютъ подъ тѣмъ же столбцомъ, а цифру десятковъ прибавляютъ къ произведенію слѣдующаго порядка на множителя.*

E) *Умноженіе продолжають до тѣхъ поръ, пока не получатъ полнаго произведенія.*

§ 23. **Умноженіе чиселъ на 10, 100, 1000 и вообще на единицу съ нулями.** Умножить числа на 10 значитъ простыя единицы превратить въ десятки, десятки въ сотни и т. д., то-есть повысить порядокъ всѣхъ цифръ на единицу. Этого достигаютъ, прибавляя справа одинъ нуль. Умножить на 100 значитъ повысить всѣ порядки множимаго двумя единицами, то-есть превратить единицы въ сотни, десятки въ тысячи и т. д.

Этого достигаютъ, приписывая къ числу два нуля.

Отсюда заключаемъ:

Для умноженія цѣлаго числа на 10, 100, 1000 и вообще на 1 съ нулями нужно приписать справа столько нулей, сколько ихъ находится во множителѣ.

Умноженіе числа 6035 на 1000 выразится *письменно:*

$$\begin{array}{r} 6035 \\ \times \quad 1000 \\ \hline 6035000 \end{array}$$

Когда множитель есть число, оканчивающееся нулями. подписываютъ подъ множимымъ только значащія цифры. а нули множителя приписываютъ справа.

Умноженіе на число, изображаемое цифрою съ нулями. Чтобы умножить 2029 на 300 нужно взять число 2029 слагаемымъ 300 разъ. Взять 300 слагаемыхъ все равно, что взять три раза по 100 слагаемымъ или 100 разъ по три слагаемыхъ. Для этого умножаемъ число на 3, а потомъ на 100, или умножаемъ сначала на 3, а потомъ приписываемъ справа два нуля.

Ходъ вычисленія выразится *письменно:*

$$\begin{array}{r} 2029 \\ \times\ 300 \\ \hline 608700 \end{array}$$

Правило. *Чтобъ умножить одно число на другое, изображаемое цифрой съ нулями, нужно сначала помножить множимое на число, выражаемое значащею цифрою, и затѣмъ приписать столько нулей, сколько ихъ находится во множителѣ.*

§ 24. **Умноженіе многозначнаго числа на многозначное.** Чтобъ умножить многозначное число 3029 на многозначное 429, или найти произведеніе 3029×429, нужно повторить 3029 слагаемымъ 429 разъ и найти сумму. Повторить 3029 слагаемымъ 429 разъ значитъ повторить его слагаемымъ сначала 9, потомъ 20 и, наконецъ, 400 разъ. Слѣдовательно, чтобъ умножить 3029 на 429, нужно 3029 умножить сначала на 9, потомъ на 20 и, наконецъ, на 400 и найти сумму этихъ трехъ произведеній.

Три произведенія

$$\begin{array}{l} 3029 \times 9 \\ 3029 \times 20 \\ 3029 \times 400 \end{array}$$

называются *частными произведеніями.*

Полное произведеніе $3029 + 429$ равно суммѣ трехъ частныхъ:

$$3029 \times 429 = 3029 \times 9 + 3029 \times 20 + 3029 \times 400.$$

Найдемъ величины этихъ трехъ частныхъ произведеній.

a) Умножая 3029 на 9, находимъ:

$$\begin{array}{r} 3029 \\ \times\ 9 \\ \hline 27261 \end{array}$$ первое частное произведеніе.

b) Умножая 3029 на 20, находимъ:

$$\begin{array}{r} 3029 \\ \times\ 20 \\ \hline 60580 \end{array}$$ второе частное произведеніе.

c) Умножая 3026 на 400, находимъ:

$$\begin{array}{r} 3029 \\ \times\ 400 \\ \hline 1211600 \end{array}$$ третье частное произведеніе.

Сложивъ эти частныя произведенія, получимъ произведеніе 3029×429.

$$\begin{array}{rl} 3029 & \\ \times\ 429 & \\ \hline 27261 & \text{первое частное произведеніе.} \\ +60580 & \text{второе частное произведеніе.} \\ 1211600 & \text{третье частное произведеніе.} \\ \hline 1299441 & \text{произведеніе.} \end{array}$$

Не трудно видѣть, что всѣ эти частныя произведенія суть произведенія числа 3029 на однозначныя числа 9, 2, 4, при чемъ ко второму произведенію, происходящему отъ умноженія на десятки, приписывается одинъ нуль, къ третьему два нуля.

Нули, приписываемые къ частнымъ произведеніямъ, опускаютъ при умноженіи и ходъ вычисленія выражаютъ *письменно:*

$$
\begin{array}{rl}
3029 & \text{множимое.} \\
\times\ 429 & \text{множитель.} \\
\hline
27261 & \text{первое частное произведеніе.} \\
+\,6058 & \text{второе частное произведеніе.} \\
12116 & \text{третье частное произведеніе.} \\
\hline
1299441 & \text{произведеніе.}
\end{array}
$$

Въ такомъ случаѣ, при умноженіи на 2, цифру десятковъ множителя, подписываютъ 8 подъ десятками, или отступаютъ влѣво на одну цифру; при умноженіи на цифру сотенъ 4, подписываютъ 6 въ третьемъ столбцѣ, или отступаютъ влѣво на 2 цифры. *Вообще каждое частное произведеніе начинаютъ подписывать отъ правой руки къ лѣвой подъ тѣмъ порядкомъ, къ которому принадлежитъ цифра множителя.*

Отыскивая произведеніе 3247 на 209, имѣемъ:

$$
\begin{array}{rl}
3247 & \\
\times\ 209 & \\
\hline
29223 & \text{первое частное произведеніе.} \\
6494 & \text{второе частное произведеніе.} \\
\hline
678623 & \text{произведеніе.}
\end{array}
$$

Здѣсь второе частное произведеніе начинаемъ подписывать подъ третьимъ столбцомъ, ибо оно выражаетъ произведеніе 3247 на 2, третью цифру множителя.

Мы здѣсь опустили только два нуля, которые должны были явиться во второмъ частномъ произведеніи, такъ какъ оно выражаетъ произведеніе числа на 2 сотни или на 200.

Изъ всего сказаннаго выводимъ

Правило: *Чтобъ умножить многозначное число на многозначное,* А) *нужно множителя подписать подъ множимымъ такъ, чтобы цифры одинаковыхъ порядковъ находились въ одномъ вертикальномъ столбцѣ, поставить слѣва знакъ умноженія и провести черту.*

В) *Умноженіе начинаютъ съ простыхъ единицъ, затѣмъ переходя отъ правой руки къ лѣвой, умножаютъ послѣдовательно множимое на цифру десятковъ, сотенъ и т. д. и составляютъ столько частныхъ произведеній, сколько значащихъ цифръ во множителѣ.*

С) *Единицы каждаго частнаго произведенія подписываютъ подъ тѣмъ столбцомъ, къ которому принадлежитъ цифра множителя.*

D) *Всѣ частныя произведенія, найденныя такимъ образомъ, складываютъ вмѣстѣ и получаютъ въ суммѣ произведеніе.*

Чтобъ умножить многозначное число на множителя, оканчивающагося нулями, нужно отбросить нули во множителѣ, умножить на оставшееся число и потомъ приписать къ произведенію столько нулей, сколько ихъ находится во множителѣ.

Примѣръ. Найти произведеніе 342 на 2700.

$$\begin{array}{r} 342 \\ \times\ 2700 \\ \hline 2394 \\ 684 \\ \hline 923400 \end{array}$$

Если множимое и множитель оба оканчиваются нулями, при умноженіи отбрасываютъ ихъ и затѣмъ къ *произведенію приписываютъ столько нулей, сколько ихъ содержится въ обоихъ производителяхъ.*

Примѣръ. Отыскивая произведенія 2700 на 35000, умножаемъ 27 на 35

$$\begin{array}{r} 27 \\ \times\, 35 \\ \hline 135 \\ 81 \\ \hline 945 \end{array}$$

Приписывая къ 945 пять нулей, получимъ искомое произведеніе

$$2700 \times 35000 = 94500000.$$

Число цифръ произведенія. Число цифръ произведенія 3728×496 можно опредѣлить слѣдующимъ образомъ. Это произведеніе болѣе 3728×100 и менѣе 3728×1000. Число цифръ перваго произведенія 6 равно числу цифръ во множимомъ 3728 и во множителѣ 496 безъ единицы. Число цифръ второго произведенія 7 равно числу цифръ во множимомъ и во множителѣ. Данное произведеніе 3728×496 не можетъ имѣть цифръ менѣе 6, числа цифръ произведенія 3728×100, и болѣе 7, числа цифръ произведенія 3728×1000.

Откуда заключаемъ: *число цифръ всякаго произведенія или равно числу цифръ во множимомъ и во множитель, или равно этому числу безъ единицы.*

Въ нашемъ произведеніи можетъ содержаться или 7 или 6 цифръ.

§ 25. **Степени**. Между различными произведеніями заслуживаютъ особаго вниманія такія, въ которыхъ производители равны. Такъ, напр.

$$2\times2=4,\ 3\times3=9.$$

Квадраты. *Произведенія двухъ равныхъ множителей называются квадратомъ чиселъ.*

Въ нашихъ примѣрахъ 4 есть квадратъ 2, 9 есть квадратъ 3.

Кубы. *Произведенія трехъ равныхъ множителей называются кубами чиселъ.*

Такъ, въ примѣрахъ $2\times2\times2=8$, $3\times3\times3=27$, число 8 есть кубъ 2, 27 есть кубъ 3.

Вообще произведенія нѣсколькихъ равныхъ множителей называются степенями чиселъ. Степени получаютъ свои названія отъ числа равныхъ множителей.

Произведенія двухъ равныхъ множителей или *квадраты* называются *вторыми степенями.*

Произведенія трехъ равныхъ множителей или кубы *называются третьими степенями*, и т. д.

Дѣленіе.

§ 26. А. Опредѣлить, сколько разъ нужно взять слагаемымъ меньшее число 2, чтобы получить большее число 6, значитъ опредѣлить, сколько разъ число 2 *содержится* въ 6, или сколько разъ число 6 содержитъ 2.

Число 2 содержится въ 6 три раза, ибо, чтобы получить 6, нужно взять сумму трехъ равныхъ слагаемыхъ

$$6=2+2+2.$$

Найти, сколько разъ число 2 содержится въ 6, значить *раздѣлить* 6 на 2.

Опредѣленіе. *Дѣленіе есть такое дѣйствіе, въ которомъ по двумъ даннымъ числамъ опредѣляютъ, сколько разъ одно число содержится въ другомъ.*

Данныя и искомыя. Данныя числа въ дѣленіи называются *дѣлимымъ* и *дѣлителемъ*, искомое называется *частнымъ*.

Дѣлимое. *Дѣлимое есть то число, которое содержитъ другое.*

Дѣлитель. *Дѣлитель есть то число, которое содержится въ другомъ.*

Частное. *Частное показываетъ, сколько разъ дѣлитель содержится въ дѣлимомъ.*

Въ данномъ примѣрѣ дѣлимое есть 6, дѣлитель 2, частное 3.

В. Раздѣлить 6 на 2 значитъ также разбить 6 на 2 равныхъ слагаемыхъ и отыскать ихъ величину. Число 6 представится при помощи двухъ равныхъ слагаемыхъ въ видѣ

$$6=3+3.$$

Каждое изъ равныхъ слагаемыхъ называется частью дѣлимаго.

Чрезъ дѣленіе цѣлыхъ чиселъ также узнается, какъ велико каждое слагаемое, если дѣлимое разобьется на столько равныхъ слагаемыхъ, сколько въ дѣлителѣ единицъ.

Въ этомъ случаѣ *дѣлимое есть то число, которое дѣлится или разбивается на равныя части. Дѣлитель показываетъ, на сколько равныхъ частей дѣлится дѣли-*

мое. Частное показываетъ, сколько приходится на каждую часть.

§ 27. **Способы дѣленія.** Имѣя два числа 12 и 4, мы можемъ раздѣлить 12 на 4 различными способами.

1. *Помощью сложенія* мы можемъ опредѣлить, сколько разъ нужно взять 4 слагаемымъ для того, чтобы получить въ суммѣ 12. Такъ, взявъ 4 слагаемымъ 3 раза, находимъ въ суммѣ:

$$4+4+4=12$$

слѣдовательно, 4 содержится въ 12 три раза.

2. *Помощью вычитанія* опредѣляемъ, сколько разъ можно изъ большаго числа 12 вычесть меньшее 4. При этомъ мы вычитаемъ дѣлителя до тѣхъ поръ, пока это возможно. Такъ, вычитая послѣдовательно изъ 12 по 4, имѣемъ:

$12-4=8$ послѣ 1-го вычитанія
$8-4=4$ „ 2-го „
$4-4=0$ „ 3-го „

Отсюда находимъ, что можно вычесть 4 изъ 12 ровно три раза.

Дѣленіе есть сокращенное вычитаніе равныхъ вычитаемыхъ.

3. *Наконецъ, посредствомъ умноженія*, мы можемъ опредѣлить, на какое число нужно помножить 4, чтобы получить 12. Умножая послѣдовательно 4 на 1, 2, 3, находимъ, что для того, чтобы получить 12, нужно 4 помножить на 3.

Различные случаи при дѣленіи. При дѣленіи цѣлыхъ чиселъ являются два случая:

1. Раздѣляя 12 на 4, мы находимъ въ частномъ 3.

Дѣлитель 4 содержится равно 3 раза въ дѣлимомъ 12. Вычитая послѣдовательно изъ 12 по 4, мы могли вычесть число 4 ровно три раза и не получили никакого остатка. Въ этомъ случаѣ говорятъ, что *дѣленіе совершилось на-цѣло* или *безъ остатка*. Умноживъ частное 3 на дѣлителя 4, получаемъ дѣлимое 12.

2. Раздѣляя 26 на 8, мы при послѣдовательномъ вычитаніи получаемъ:

$26-8=18$	послѣ	1-го	вычитанія
$18-8=10$	„	2-го	„
$10-8=2$	„	3-го	„

Далѣе нельзя продолжать вычитанія, потому что изъ 2 нельзя вычесть дѣлителя 8. Число 2 называютъ *остаткомъ*.

Остатокъ всегда менѣе дѣлителя. Въ этомъ случаѣ говорятъ, что *дѣленіе не совершается на-цѣло* или дѣленіе *совершается съ остаткомъ*.

Раздѣляя 26 на 8, мы могли вычесть дѣлителя 8 три раза, и у насъ получился остатокъ 2. Число 3 мы будемъ называть *цѣлымъ частнымъ*. Цѣлое частное есть не полное частное, ибо оно не выражаетъ вполнѣ, сколько разъ меньшее число содержится въ большемъ. Число 8 не содержится въ 26 ровно 3 раза. Въ этомъ случаѣ говорятъ: Число 8 содержится въ 26 три раза и еще получается остатокъ. Умноживъ дѣлителя 8 на цѣлое частное 3, мы не получимъ дѣлимаго 26, а число 24—меньшее дѣлимаго. Чтобы получить дѣлимое, нужно къ этому произведенію прибавить еще остатокъ 2.

Цѣлое частное иногда называютъ просто частнымъ.

Итакъ, при дѣленіи мы имѣемъ два случая:

1. Дѣленіе на-цѣло или безъ остатка. *Когда дѣлитель содержится въ дѣлимомъ ровное число разъ, тогда дѣленіе совершается на-цѣло или безъ остатки. Частное выражаетъ, сколько разъ дѣлитель содержится въ дѣлимомъ. Дѣлимое равно дѣлителю, умноженному на частное. Въ этомъ случаѣ дѣленіе есть дѣйствіе, въ которомъ по данному произведенію и одному изъ производителей находится другой производитель.*

Если дается произведеніе и множимое, отыскиваютъ множителя, то-есть число равныхъ слагаемыхъ; если дается произведеніе и множитель, отыскиваютъ множимое, то-есть величину равныхъ слагаемыхъ.

2. Дѣленіе съ остаткомъ. *Когда дѣлитель не содержится въ дѣлимомъ ровное число разъ, тогда дѣленіе не совершается на-цѣло, или дѣленіе совершается съ остаткомъ. Остатокъ всегда менѣе дѣлителя и дѣлимое равно произведенію дѣлителя на цѣлое частное, сложенному съ остаткомъ.*

При дѣленіи цѣлыхъ чиселъ дѣлимое всегда *уменьшается* во столько разъ, сколько въ дѣлителѣ единицъ, поэтому *дѣленіе есть дѣйствіе, обратное умноженію.*

Знакъ дѣленія. а) *Дѣйствіе дѣленія изображается знакомъ двоеточія :, который ставится между дѣлимымъ и дѣлителемъ.*

Дѣленіе числа 6 на 2 изображаютъ письменно:

$6 : 2 = 3$ частное.

b) *Дѣйствіе дѣленія обозначается также начертаніемъ |—, гдѣ вертикальная черта отдѣляетъ дѣлимое, а горизонтальная дѣлителя отъ частнаго.*

Въ данномъ примѣрѣ имѣемъ

дѣлимое 6	2	дѣлитель
	3	частное

Наконецъ, с) *для обозначенія дѣленія подписываютъ дѣлителя подъ дѣлимымъ, отдѣляя ихъ горизонтальною чертою.*

Въ нашемъ примѣрѣ дѣленіе изображается письменно:

$$\frac{6}{2}=3$$

Знакъ дѣленія перешелъ къ намъ отъ древнихъ математиковъ.

§ 28. **Основные пріемы при дѣленіи.** *Дѣлить значитъ послѣдовательно вычитать дѣлителя изъ дѣлимаго, пока это возможно.* Этотъ способъ дѣленія можно считать общимъ. Пріемъ этотъ, однако, приводитъ къ длиннымъ вычисленіямъ, если дѣлимое очень велико, поэтому существуютъ различные сокращенные пріемы дѣленія.

Чтобы опредѣлить частное въ томъ случаѣ, когда оно выражается одною цифрою, прибѣгаютъ къ таблицѣ умноженія.

Чтобы раздѣлить 27 на 3, мы пишемъ

27 : 3 или 27 | 3

Для частнаго выбираемъ такое число, чтобы, умноживъ дѣлителя на частное, получить дѣлимое. Чтобы найти цифру частнаго, мы пробуемъ умножать дѣлителя на разныя числа или, какъ обыкновенно говорятъ, *задаемся разными числами*, и сравниваемъ произведеніе дѣлителя на частное съ дѣлимымъ.

Раздѣляя 27 на 3 и перебирая въ умѣ всѣ произведенія 3 на разныя числа, содержащіяся въ таблицѣ умноженія, находимъ, что произведеніе 3×9 составляетъ 27 и потому пишемъ въ частномъ 9. Вычитая произведеніе дѣлителя на частное изъ дѣлимаго, получаемъ въ остаткѣ нуль.

Самое вычисленіе выражаютъ *письменно:*

$$\begin{array}{r|l} 27 & 3 \\ \cline{2-2} -\;27 & 9 \\ \cline{1-1} 0 & \end{array}$$

Дѣленіе совершилось на-цѣло.

Иногда дѣлитель не содержится въ дѣлимомъ ровное число разъ; такъ, раздѣляя 27 на 4, мы не находимъ въ таблицѣ цѣлаго числа, которое, будучи помножено на 4, дало бы 27; тогда дѣленіе не совершается на-цѣло.

Отыскивая цѣлое частное, мы имѣемъ при этомъ три случая:

1) Или *мы задаемся очень малымъ числомъ;* такъ, для даннаго примѣра, задавшись въ частномъ 5 и умноживъ 4 на 5, имѣемъ 20. Подписавъ произведеніе 20 подъ дѣлимымъ и вычитая изъ 27, имѣемъ:

$$\begin{array}{r|l} 27 & 4 \\ \cline{2-2} -\;20 & 5 \\ \cline{1-1} 7 & \text{остатокъ} \end{array}$$

въ остаткѣ число 7 болѣе дѣлителя 4. Это показываетъ, что частное 5 мало и его нужно увеличить.

2) Или, взявъ для частнаго 7 и умноживъ его на

дѣлителя 4, получаемъ произведеніе 28 болѣе дѣлимаго, что показываетъ, что *мы задались въ частномъ очень большимъ числомъ.* Въ такомъ случаѣ нужно уменьшить цифру частнаго 7.

3) Взявъ для частнаго 6, мы ходъ вычисленія выражаемъ *письменно*:

$$\begin{array}{r|l} 27 & 4 \\ \cline{2-2} -\ 24 & 6 \text{ цѣлое частное} \\ \cline{1-1} 3 & \text{остатокъ} \end{array}$$

словесно: 4 въ 27 содержится 6 разъ, 4-жды 6=24, подписываемъ 24 подъ дѣлимымъ, вычитаемъ и получаемъ остатокъ 3. Остатокъ 3 менѣе дѣлителя, слѣдовательно, *цифра частнаго вѣрна.* Отсюда выводимъ слѣдующее

Правило опредѣленія цифры частнаго: *Если при дѣленіи* 1) *остатокъ болѣе или равенъ дѣлителю, цифра частнаго мала и ее нужно увеличить.*

2) *Если произведеніе дѣлителя на частное болѣе дѣлимаго, цифра частнаго велика и ее нужно уменьшить.*

3) *Если остатокъ менѣе дѣлителя, цифра частнаго вѣрна.*

Это правило показываетъ, что *при дѣленіи нужно для частнаго выбирать такую цифру, чтобы остатокъ былъ менѣе дѣлителя. Задаваться такъ, значитъ задаваться наибольшимъ цѣлымъ числомъ.*

Въ данномъ примѣрѣ 27 не дѣлится на-цѣло на 4, а получается остатокъ 3; число 6 есть цѣлое частное и

$$27=4\times6+3=24+3.$$

Дѣлимое 27 равно произведенію дѣлителя 4 на цѣлое частное 6, сложенному съ остаткомъ 3.

§ 29. **Дѣленіе многозначнаго числа на однозначное.** Частное отъ дѣленія многозначнаго числа на однозначное иногда выражается числомъ, состоящимъ также изъ нѣсколькихъ цифръ. Въ этомъ случаѣ дѣленіе распадается на нѣсколько отдѣльныхъ дѣйствій.

Раздѣлимъ 702 на 3. Частное содержитъ три цифры. Оно болѣе 100 и менѣе 1000, ибо дѣлимое болѣе 300(3×100) и менѣе 3000(3×1000). Состоя изъ трехъ цифръ, частное содержитъ сотни, десятки и единицы. Въ данномъ случаѣ разбиваемъ дѣленіе на три отдѣльныя дѣйствія, то-есть отыскиваемъ послѣдовательно сотни, потомъ десятки и, наконецъ, единицы частнаго. Самое дѣйствіе начинаемъ съ сотенъ.

a) *Отыскиваемъ сотни частнаго*. Цифра сотенъ частнаго можетъ происходить отъ дѣленія сотенъ дѣлимаго на дѣлителя 3. Десятки и единицы дѣлимаго не имѣютъ никакого вліянія на сотни частнаго, поэтому на нихъ пока не обращаемъ вниманія. Наибольшее число сотенъ въ частномъ есть 2, ибо 3 содержится въ 7 сотняхъ 2 сотни разъ; пишемъ въ частномъ 200. Умножая 200 на 3 и вычитая произведеніе 600 изъ дѣлимаго, получаемъ первый остатокъ 132.

$$
\begin{array}{rr|l}
 & 732 & 3 \\
\hline
- & \underline{600} & 200+40+4 \\
 & 132 & \text{первый остатокъ} \\
- & \underline{120} & \\
 & 12 & \text{второй остатокъ} \\
 & \underline{12} & \\
 & 0 &
\end{array}
$$

b) *Отыскиваемъ десятки частнаго.* Въ остаткѣ 132 находится 12 десятковъ. Единицы дѣлимаго не имѣютъ вліянія на десятки частнаго. Раздѣливъ 13 на 3, находимъ, что въ частномъ могутъ быть только 4 десятка, — пишемъ 40 въ частномъ. Умножая 40 на 3 и вычитая произведеніе 120, получаемъ въ остаткѣ 12.

c) *Отыскиваемъ единицы частнаго.* Раздѣливъ 12 на 3, находимъ для единицъ частнаго 4. Умножая 4 на 3 и вычитая произведеніе 12, получаемъ въ остаткѣ 0.

Если не писать каждый разъ лишнихъ нулей и принимать въ соображеніе только тѣ цифры дѣлимаго, которыя имѣютъ вліяніе на частное, дѣленіе изобразится *письменно:*

$$
\begin{array}{r|l}
732 & 3 \\ \cline{2-2}
\underline{6} & 244 \\
13 & \\
\underline{12} & \\
12 & \\
\underline{12} & \\
0 &
\end{array}
$$

словесно:

a) Отдѣляемъ 7—одну цифру дѣлимаго; 3 въ 7 содержится 2 раза, — пишемъ въ частномъ 2; умножая на нее дѣлителя 3 и вычитая произведеніе 6 изъ 7, получаемъ первый остатокъ 1.

b) Сносимъ 3—слѣдующую цифру дѣлимаго; 3 въ 13 содержится 4 раза, 3-жды 4 составляетъ 12; вычитая 12 изъ 13, получаемъ въ остаткѣ 1.

c) Сносимъ 2—слѣдующую цифру дѣлимаго; 3 въ

12 содержится 4 раза, пишемъ въ частномъ 4; 3-жды 4 составляетъ 12. Вычитая 12, получаемъ въ остаткѣ нуль и въ частномъ 244.

Примѣръ. Раздѣлить 2417 на 3. Ходъ вычисленія выразится *письменно:*

$$\begin{array}{r|l} 2417 & 3 \\ \cline{2-2} \underline{24} & 805 \\ 17 & \\ \underline{15} & \\ 2 & \end{array}$$

словесно:

a) Отдѣливъ одну цифру 2, мы видимъ, что 3 въ 2 не содержится цѣлое число разъ, поэтому нужно отдѣлить двѣ цифры; 3 въ 24 содержится 8 разъ,— пишемъ 8 въ частномъ. Умноживъ 8 на дѣлителя 3 и вычитая произведеніе 24, получаемъ въ остаткѣ нуль.

b) Сносимъ слѣдующую цифру 1; 3 въ 1 не содержится,—пишемъ въ частномъ нуль.

c) Сносимъ слѣдующую цифру 7; 3 въ 17 содержится 5 разъ,—пишемъ въ частномъ 5; 3-жды 5 составляетъ 15; вычитая 15 изъ 17, получимъ въ *остаткѣ* 2 и *цѣлое частное* 805.

Дѣленіе многозначнаго числа на многозначное. При дѣленіи многозначнаго числа на многозначное поступаемъ точно такъ же, какъ поступали при дѣленіи многозначнаго числа на однозначное.

Раздѣляя число 37207 на 47, мы прежде всего опредѣляемъ, изъ сколькихъ цифръ состоитъ частное. Частное менѣе 1000 и болѣе 100, ибо 37207 менѣе 47000 (47×1000) и болѣе 4700 (47×100), слѣдовательно, частное состоитъ изъ сотенъ, десятковъ и единицъ. Начиная съ сотенъ, мы опредѣляемъ каждую цифру частнаго отдѣльно:

a) *Опредѣляемъ сотни частнаго:*

Дѣлимое 37207 имѣетъ 372 сотни. Десятки и единицы дѣлимаго не имѣютъ вліянія на цифру сотенъ частнаго. Въ частномъ можетъ быть только 7 сотенъ, ибо 47 содержится въ 372 семь разъ; пишемъ въ частномъ 700.

Умножая дѣлителя на частное и вычитая изъ дѣлимаго, получаемъ первый остатокъ 4307.

37207	47
32900	700+90+1
4307	первый остатокъ.
4230	
77	второй остатокъ.
47	
30	третій остатокъ.

b) *Опредѣляемъ десятки частнаго:*

Остатокъ 4307 содержитъ 430 десятковъ. Единицы не имѣютъ вліянія на цифру десятковъ частнаго. Дѣлитель 47 содержится въ 430 девять разъ; пишемъ въ частномъ 90.

Умножая 90 на частное 47 и вычитая произведеніе 4230, получаемъ въ остаткѣ 77.

c) *Опредѣляемъ единицы частнаго.*

47 содержится въ 77 одинъ разъ. Пишемъ въ частномъ 1 и, вычитая изъ 77 произведеніе единицы на дѣлителя, получаемъ въ остаткѣ 30.

Итакъ, послѣ дѣленія имѣемъ въ цѣломъ частномъ 791 и въ остаткѣ 30.

Если не писать каждый разъ лишнихъ нулей и принимать въ соображеніе только тѣ цифры дѣлимаго, которыя имѣютъ вліяніе на частное, ходъ вычисленія изобразится *письменно:*

$$\begin{array}{r|l}
37207 & 47 \\ \cline{2-2}
\underline{329\;\;} & 791 \text{ цѣлое частное.} \\
430\; & \\
\underline{423\;} & \\
77 & \\
\underline{47} & \\
30 & \text{остатокъ.}
\end{array}$$

словесно:

a) Отдѣляемъ въ дѣлимомъ отъ лѣвой руки къ правой столько цифръ, чтобы дѣлитель могъ содержаться въ отдѣленной части дѣлимаго. Въ данномъ случаѣ отдѣляемъ 3 цифры, 47 содержится въ 372 семь разъ; умножаемъ дѣлителя 47 на 7, цифру частнаго, и, вычитая произведеніе $47 \times 7 = 329$ изъ 372, получаемъ въ остаткѣ 43.

b) Къ остатку 43 сносимъ 0, слѣдующую цифру дѣлимаго; 47 содержится въ 430 девять разъ, пишемъ въ частномъ 9. Умножая 47 на 9 и вычитая произведеніе 423 изъ 430, получаемъ въ остаткѣ 7.

c) Сносимъ къ остатку слѣдующую цифру частнаго 7; 47 содержится въ 77 одинъ разъ. Пишемъ единицу въ частномъ.

Умножая ею дѣлителя и вычитая 47 изъ 77, получаемъ въ остаткѣ 30 и въ цѣломъ частномъ 791.

Примѣръ. Раздѣлить 671064 на 335. Дѣленіе изобразится *письменно*:

$$\begin{array}{r|l} 671064 & 335 \\ \cline{2-2} 670 & 2003 \\ \hline 1064 & \\ 1005 & \\ \hline 59 & \end{array}$$

словесно:

a) Отдѣляемъ 671 въ дѣлимомъ; 335 содержится въ 671 два раза, пишемъ въ частномъ 2. Умножая 335 на 2 и вычитая произведеніе 670, получимъ въ остаткѣ 1.

b) Сносимъ 0, слѣдующую цифру дѣлимаго; 335 не содержится въ 10, — пишемъ для второй цифры частнаго 0.

c) Сносимъ 6, слѣдующую цифру дѣлимаго; 335 не содержится въ 106, — пишемъ для третьей цифры частнаго 0.

d) Сносимъ слѣдующую цифру дѣлимаго 4; 335 содержится въ 1064 три раза, — пишемъ въ частномъ 3. Умножая дѣлителя на 3 и вычитая произведеніе, получимъ въ остаткѣ 59 и въ цѣломъ частномъ 2003.

Изъ предложенныхъ примѣровъ выводимъ слѣдующее

Правило: А) *Чтобъ раздѣлить многозначное число на однозначное или многозначное, нужно отдѣлить въ дѣлимомъ отъ лѣвой руки къ правой столько цифръ, сколько ихъ находится въ дѣлителѣ. Если дѣлитель не содержится, отдѣляютъ въ дѣлимомъ одною цифрою больше. Раздѣливъ отдѣленное число на дѣлителя, получаютъ* *первую цифру частнаго, умножаютъ ею дѣлителя и полученное произведенiе вычитаютъ изъ отдѣленной части дѣлимаго.*

B) *Къ остатку сносятъ слѣдующую цифру дѣлимаго и снова задаются.*

C) *Если при этомъ получится число меньше дѣлителя, пишутъ въ частномъ нуль, сносятъ слѣдующую цифру и снова задаются.*

D) *Получивъ новую цифру частнаго, поступаютъ съ нею такъ же, какъ и съ первою цифрою.*

E) *Дѣленiе продолжаютъ до тѣхъ поръ, пока не снесутъ всѣхъ цифръ дѣлимаго и не получатъ такимъ образомъ всѣхъ цифръ частнаго.*

Всякiй разъ, когда приходится дѣлить, нужно задаваться въ частномъ такою цифрою, чтобъ остатокъ былъ менѣе дѣлителя. Чтобы легче найти самую цифру частнаго, при дѣленiи многозначнаго числа на многозначное обращаютъ вниманiе на одну или двѣ старшiя цифры дѣлителя и задаются только ими въ соотвѣтствующей части дѣлимаго. При этомъ въ дѣлимомъ и въ дѣлителѣ отдѣляютъ отъ правой руки къ лѣвой одинаковое число цифръ. Такъ, опредѣляя, сколько разъ содержится 6373 въ 27302, мы задаемся четырьмя, ибо 6 въ 27 содержится 4 раза.

$$\begin{array}{r|l} 27302 & 6373 \\ \cline{2-2} 25492 & 4 \\ \cline{1-1} 1810 & \end{array}$$

Полученная при этомъ цифра частнаго будетъ или равна или болѣе дѣйствительной. Въ послѣднемъ случаѣ ее нужно уменьшить.

Иногда при дѣленіи не подписываютъ произведенія цифры частнаго на дѣлителя, а, подразумѣвая его въ умѣ, подписываютъ одинъ остатокъ. Сокращая такимъ образомъ дѣленіе, изображаютъ его *письменно:*

```
 4328 | 8
 ----+----
  32  | 541
 ----
    8
 ----
    0
```

словесно: а) 8 въ 43 содержится 5 разъ; 5-ю 8—сорокъ. Вычитая 40 изъ 43, получимъ въ остаткѣ 3.

b) Сносимъ 2; 8 въ 32 содержится 4 раза; 4-жды 8 составляетъ 32. Вычитая 32, получимъ въ остаткѣ нуль.

c) Сносимъ 8; 8 въ 8 содержится 1 разъ, 1-жды 8 составляетъ 8. Вычитая 8, получаемъ въ остаткѣ нуль и въ частномъ 541.

§ 30. **Дѣленіе на 10, 100, 1000 и вообще на 1 съ нулями.** Раздѣляя число на 10, мы десятки дѣлимаго обращаемъ въ единицы, сотни въ десятки, тысячи въ сотни, вообще понижаемъ на единицу всѣ порядки дѣлимаго. Этого мы достигаемъ, отдѣляя запятою цифру единицъ. Число до запятой будетъ выражать частное, а послѣ запятой—остатокъ.

Раздѣляя на 100, мы понижаемъ всѣ порядки дѣлимаго на двѣ единицы, для чего отдѣляемъ запятою отъ правой руки къ лѣвой двѣ цифры и т. д. Отсюда

Правило: *Чтобы раздѣлить какое-нибудь число на единицу съ нулями, нужно отъ правой руки къ лѣвой отдѣлить столько цифръ, сколько нулей въ дѣлителѣ;*

тогда число до запятой выражаетъ цѣлое частное, а послѣ запятой—остатокъ.

Примѣръ. Раздѣлить 30207 на 100. Отдѣляя справа 2 цифры, находимъ 302,07. Цѣлое частное будетъ 302, а остатокъ 7.

Дѣленіе на число, оканчивающееся нулями. Раздѣляя число 27057 на 400 и поступая при этомъ по общему правилу

$$
\begin{array}{r|l}
27057 & 400 \\
\cline{2-2}
2400 & 67 \\
\cline{1-1}
3057 & \\
2800 & \\
\cline{1-1}
257 &
\end{array}
$$

мы замѣчаемъ, что двѣ послѣднія цифры дѣлимаго не оказываютъ никакого вліянія на частное. Онѣ являются въ остаткѣ безъ всякой перемѣны. Откуда

Правило: *Если дѣлитель оканчивается нулями, отдѣляютъ въ дѣлимомъ запятою отъ правой руки къ лѣвой столько цифръ, сколько зачеркнуто нулей въ дѣлителѣ, и дѣлятъ часть дѣлимаго до запятой на значащія цифры дѣлителя. Отдѣленныя цифры дѣлимаго приписываютъ къ остатку.*

Въ данномъ примѣрѣ дѣленіе представится въ видѣ

$$
\begin{array}{r|l}
270{,}57 & 4\cancel{00} \\
\cline{2-2}
24\phantom{0{,}57} & 67 \\
\cline{1-1}
30\phantom{{,}57} & \\
28\phantom{{,}57} & \\
\cline{1-1}
257 &
\end{array}
$$

Если дѣлимое и дѣлитель оканчиваются нулями, ихъ *зачеркиваютъ поровну въ дѣлимомъ, въ дѣлителѣ и производятъ дѣленіе; зачеркнутые нули дѣлимаго приписываютъ къ остатку.*

Чтобы раздѣлить 27300 на 4100, дѣлимъ 273 на 41.

$$\begin{array}{r|l} 273\overline{00} & 41\overline{00} \\ \underline{246} & \overline{6} \\ 2700 & \end{array}$$

Частное будетъ 6, а остатокъ 2700.

Число цифръ частнаго. При дѣленіи отдѣляютъ въ дѣлимомъ отъ лѣвой руки къ правой столько цифръ, сколько ихъ находится въ дѣлителѣ, или одною болѣе. Каждой оставшейся цифрѣ дѣлимаго соотвѣтствуетъ особая цифра частнаго, слѣдовательно, *число цифръ частнаго будетъ равно или разности числа цифръ дѣлимаго и дѣлителя или на единицу больше этой разности.*

§ 31. **Зависимость между данными и искомыми дѣленія.**

При дѣленіи цѣлыхъ чиселъ мы имѣемъ два случая:

а) *дѣленіе на-цѣло или безъ остатка* и b) *дѣленіе съ остаткомъ.*

Каждому изъ этихъ случаевъ соотвѣтствуетъ особая зависимость между данными и искомыми дѣленія.

а) Дѣленіе на-цѣло или безъ остатка. *При дѣленіи на-цѣло*

1) *Частное равно дѣлимому, раздѣленному на дѣлителя.*

Раздѣляя 42 на 7, имѣемъ въ частномъ 6; слѣдовательно,

$$42 : 7 = 6, \text{ или } 6 = 42 : 7.$$

2) *Дѣлимое равно дѣлителю, умноженному на частное.*

$$42=6\times7.$$

3) Такъ какъ дѣлитель и частное—два производителя, произведеніе которыхъ равно дѣлимому, то *дѣлитель равенъ дѣлимому, раздѣленному на частное.*

$$7=42:6.$$

b) Д ѣ л е н і е   с ъ   о с т а т к о м ъ. При дѣленіи съ остаткомъ

1) *Дѣлимое равно произведенію дѣлителя на цѣлое частное, сложенному съ остаткомъ.*

При дѣленіи 47 на 6, имѣемъ въ цѣломъ частномъ 7, въ остаткѣ 5.

Дѣлимое $47=6\times7+5$.

2) *Дѣлимое безъ остатка дѣлится на-цѣло на дѣлителя и на цѣлое частное.*

Разность дѣлимаго безъ остатка равна произведенію дѣлителя на цѣлое частное, то-есть эта разность при дѣленіи на дѣлителя даетъ цѣлое частное, при дѣленіи на цѣлое частное даетъ дѣлителя.

IV. Повѣрка четырехъ основныхъ ариѳметическихъ дѣйствій.

§ 32. Чтобъ убѣдиться, что какое-нибудь ариѳметическое дѣйствіе сдѣлано безъ ошибки, его повѣряютъ.

П о в ѣ р к а. *Повѣркой называютъ совокупность ариѳметическихъ пріемовъ съ цѣлью убѣдиться, что данное* *ариѳметическое дѣйствіе исполнено вѣрно.* Повѣрка состоитъ тоже изъ ариѳметическихъ дѣйствій, исполненныхъ въ другомъ порядкѣ.

Самый простой способъ убѣдиться, что дѣйствіе исполнено вѣрно, состоитъ, конечно, въ томъ, чтобы повторить его снова. Однако, замѣчено, что увѣренность наша увеличивается, если мы убѣдимся другимъ путемъ въ вѣрности какого-нибудь результата, поэтому повѣряютъ ариѳметическія дѣйствія иначе.

Повѣрка основана на главныхъ свойствахъ самыхъ ариѳметическихъ дѣйствій и на зависимости, существующей между данными и искомыми числами.

Основываясь на главныхъ свойствахъ самыхъ дѣйствій, мы можемъ каждое дѣйствіе повѣрять тѣмъ же дѣйствіемъ, только исполненнымъ въ другомъ порядкѣ. Такимъ образомъ, сложеніе повѣряется сложеніемъ, вычитаніе—вычитаніемъ и т. д.

§ 23. **Повѣрка ариѳметическихъ дѣйствій тѣми же дѣйствіями.**

1) Повѣрка сложенія. Сумма не измѣняется отъ перемѣны порядка слагаемыхъ, слѣдовательно, *чтобы повѣрить сложеніе, нужно сложить слагаемыя въ другомъ порядкѣ; если получится та же самая сумма, сложеніе сдѣлано вѣрно.*

Сложеніе:

$$\begin{array}{r} \scriptstyle 2\,1\;\;2 \\ 69207 \\ 3925 \\ 14207 \\ 8208 \\ \hline 95547 \end{array}$$

Повѣрка сложенія:

$$\begin{array}{r} {\scriptstyle 21\ 2\ \ \ } \\ 3925 \\ 14207 \\ 8208 \\ 69207 \\ \hline 95547 \end{array}$$

Сложеніе вѣрно.

Обыкновенно при повѣркѣ складываютъ слагаемыя въ обратномъ порядкѣ, то-есть снизу вверхъ.

2) Повѣрка вычитанія. Вычитаемое равно уменьшаемому безъ разности, слѣдовательно, *чтобы повѣрить вычитаніе, нужно изъ уменьшаемаго вычесть разность; если въ остаткѣ получится вычитаемое, вычитаніе сдѣлано вѣрно.*

Вычитаніе:

$$\begin{array}{rl} \dot{7}\dot{3}\dot{2}\dot{0}16 & \text{уменьшаемое} \\ -\ \ 92374 & \text{вычитаемое} \\ \hline 639642 & \text{остатокъ} \end{array}$$

Повѣрка вычитанія:

$$\begin{array}{rl} \dot{7}\dot{3}\dot{2}\dot{0}16 & \text{уменьшаемое} \\ 639642 & \text{остатокъ} \\ \hline 92374 & \text{вычитаемое} \end{array}$$

Вычитаніе вѣрно.

3) Повѣрка умноженія. Произведеніе не измѣняется отъ перемѣны порядка производителей, слѣд., *чтобы повѣрить умноженіе, нужно перемѣнить порядокъ производителей и сдѣлать снова умноженіе; если получимъ то же произведеніе, умноженіе сдѣлано вѣрно.*

Умноженіе:

$$
\begin{array}{rl}
1627 & \text{множимое} \\
\times\ 308 & \text{множитель} \\
\hline
13016 & \\
4881 & \\
\hline
501116 & \text{произведеніе.}
\end{array}
$$

Повѣрка умноженія:

$$
\begin{array}{rl}
308 & \text{множитель} \\
\times\ 1627 & \text{множимое} \\
\hline
2156 & \\
616 & \\
1848 & \\
308 & \\
\hline
501116 & \text{произведеніе.}
\end{array}
$$

Умноженіе вѣрно.

4. Повѣрка дѣленія. При дѣленіи на-цѣло дѣлитель равенъ дѣлимому, раздѣленному на частное, слѣд., *чтобы повѣрить дѣленіе, въ случаѣ дѣленія на-цѣло, нужно дѣлимое раздѣлить на частное; если въ частномъ получится дѣлитель, дѣленіе сдѣлано вѣрно.*

Дѣленіе:

$$
\begin{array}{r|l}
7392 & 24 \\
\cline{2-2}
72 & 308 \\
\cline{1-1}
192 & \\
192 & \\
\cline{1-1}
\text{” ” ”} &
\end{array}
$$

Повѣрка дѣленія:

$$
\begin{array}{r|l}
7392 & 308 \\
\cline{2-2}
616 & 24 \\
\cline{1-1}
1232 & \\
1232 & \\
\cline{1-1}
\text{” ” ” ”} &
\end{array}
$$

Дѣленіе вѣрно.

Повѣрка обратными ариѳметическими дѣйствіями.

§ 34. Пользуясь основными свойствами данныхъ и искомыхъ чиселъ, *обыкновенно производятъ повѣрку обратными ариѳметическими дѣйствіями*. Такимъ образомъ, *сложеніе повѣряется вычитаніемъ, вычитаніе сложеніемъ, умноженіе дѣленіемъ, дѣленіе умноженіемъ.*

1. Повѣрка сложенія. *Чтобы повѣрить сложеніе, отбрасываютъ одно слагаемое, складываютъ остальныя и сумму вычитаютъ изъ общей суммы; если въ остаткѣ получается отброшенное слагаемое, сложеніе сдѣлано вѣрно.*

Повѣрка сложенія:

$$\begin{array}{rl} 3925 & \\ 14207 & \\ +\,8208 & \\ 69207 & * \\ \hline 95547 & \\ -26340 & \\ \hline 69207 & \end{array}$$

Здѣсь мы обозначили звѣздочкой отброшенное слагаемое и, сложивъ остальныя, полученную сумму 26340 вычли изъ общей суммы. Въ остаткѣ получили зачеркнутое слагаемое, слѣдовательно — сложеніе сдѣлано вѣрно.

2. Повѣрка вычитанія. Уменьшаемое равно вычитаемому, сложенному съ остаткомъ; слѣд., *чтобы повѣрить вычитаніе, нужно вычитаемое сложить съ остаткомъ; если въ суммѣ получится уменьшаемое, вычитаніе сдѣлано вѣрно.*

Повѣрка вычитанія:

732016 — 92374 639642 732016	Для повѣрки складываемъ вычитаемое съ остаткомъ и получаемъ въ суммѣ уменьшаемое.

Вычитаніе вѣрно.

3. П о в ѣ р к а у м н о ж е н і я. Произведеніе, раздѣленное на одного производителя, должно дать въ частномъ другого, слѣд., *чтобы повѣрить умноженіе, нужно раздѣлить произведеніе на одного производителя; если въ частномъ получается другой производитель, а въ остаткѣ нуль, умноженіе сдѣлано вѣрно.*

Повѣрка умноженія:

```
  1627
×  308
 13016
4881
501116 | 1627
4881   |-----
       | 308
 13016
 13016
     0
```

Раздѣляя произведеніе 501116 на одного производителя 1627, получимъ въ остаткѣ нуль, а въ частномъ другого производителя 308; слѣд., умноженіе сдѣлано вѣрно.

4. П о в ѣ р к а д ѣ л е н і я. Дѣлимое равно произведенію дѣлителя на цѣлое частное, сложенному съ остаткомъ; слѣд., *чтобы повѣрить дѣленіе, нужно дѣлителя*

умножить на цѣлое частное и приложить остатокъ; если получимъ дѣлимое, дѣленіе сдѣлано вѣрно.

Дѣленіе:		*Повѣрка дѣленія:*
27358	107	107
214	255	× 255
595		535
535		535
608		214
535		27285
73		+ 73
		27358

Для повѣрки умножаемъ дѣлителя 107 на цѣлое частное 255 и прикладываемъ остатокъ 73, получаемъ дѣлимое 27358; слѣд., дѣленіе сдѣлано вѣрно.

V. Измѣненія суммы, разности, произведенія и частнаго.

§ 35. **Измѣненіе суммы**. Сумма равна всѣмъ слагаемымъ, взятымъ вмѣстѣ.

1. Всякая лишняя единица въ слагаемомъ должна увеличивать и сумму на единицу; слѣд.,

если одно изъ слагаемыхъ увеличимъ какимъ-нибудь числомъ, сумма увеличится тѣмъ же числомъ.

2. Всякая единица, отнятая у слагаемаго, должна уменьшать и сумму на единицу; слѣд.,

если одно изъ слагаемыхъ уменьшимъ какимъ-нибудь числомъ, сумма уменьшится тѣмъ же числомъ.

Слагаемыя и сумма измѣняются одинаковымъ образомъ, то-есть сумма увеличивается и уменьшается съ каждымъ изъ слагаемыхъ однимъ и тѣмъ же числомъ.

3. *Если одно слагаемое увеличимъ, а другое уменьшимъ однимъ и тѣмъ же числомъ, сумма не измѣнится.*

Прибавокъ и убавокъ. Число, на которое увеличивается другое число, будемъ называть *прибавкомъ*, а число, на которое уменьшается другое число, будемъ называть *убавкомъ*.

Прибавокъ суммы равенъ суммѣ прибавковъ слагаемыхъ.

Убавокъ суммы равенъ суммѣ убавковъ слагаемыхъ.

Примѣръ: Слагаемыя 6, 17, 18

$$\text{Сумма} = 6 + 17 + 18 = 41.$$

Первое слагаемое увеличиваемъ на 3, второе на 1, третье на 2 единицы. Послѣ этого измѣненія слагаемыя будутъ:

$6+3=9$ первое слагаемое

$17+1=18$ второе слагаемое

$18+2=20$ третье слагаемое

Сложивъ эти слагаемыя, получимъ:

$6+17+18+3+1+2=9+18+20$

$9+18+20=47$ есть измѣненная сумма.

$6+17+18=41$ прежняя сумма.

Прибавокъ суммы будетъ:

$$47-41=6$$

Прибавокъ суммы равенъ суммѣ прибавковъ слагаемыхъ:

$$6=3+1+2.$$

§ 36. **Измѣненіе разности.** Разность измѣняется отъ измѣненія уменьшаемаго и вычитаемаго отдѣльно.

Уменьшаемое есть сумма, въ которой вычитаемое и разность составляютъ два слагаемыхъ. Не трудно видѣть, что, если одно слагаемое не измѣняется, другое слагаемое должно на основаніи свойства суммы измѣняться съ суммою одинаковымъ образомъ, то-есть одновременно увеличиваться и уменьшаться.

Отсюда выводимъ

А) Измѣненіе разности въ зависимости отъ измѣненія уменьшаемаго.

Оставляя вычитаемое безъ перемѣны, 1) *если уменьшаемое увеличимъ какимъ-нибудь числомъ, разность увеличится тѣмъ же числомъ;* 2) *если уменьшаемое уменьшимъ какимъ-нибудь числомъ, разность уменьшится тѣмъ же числомъ.*

Примѣръ. Для случая вычитанія

$$17-5=12,$$

увеличивъ уменьшаемое на 3 единицы, получимъ:

$$20-5=15$$

Откуда видимъ, что разность тоже увеличилась на 3 единицы.

Убавивъ уменьшаемое на 3 единицы, получимъ:

$$14-5=9$$

Откуда видимъ, что разность также уменьшилась на 3 единицы.

Эти правила измѣненія разности можно еще выразить короче такъ:

1) *Прибавокъ разности равенъ прибавку уменьшаемаго.*

2) *Убавокъ разности равенъ убавку уменьшаемаго.*

Для того, чтобы сумма двухъ слагаемыхъ оставалась неизмѣнною, мы, увеличивая одно слагаемое какимъ-нибудь числомъ, должны другое слагаемое уменьшить тѣмъ же числомъ и обратно.

Отсюда выводимъ

B) Измѣненіе разности въ зависимости отъ измѣненія вычитаемаго.

Оставляя уменьшаемое безъ перемѣны:

1. *Если вычитаемое увеличимъ какимъ-нибудь числомъ, разность уменьшится тѣмъ же числомъ.*

2. *Если вычитаемое уменьшимъ какимъ-нибудь числомъ, разность увеличится тѣмъ же числомъ.*

Измѣненія разности идутъ въ обратномъ порядкѣ съ измѣненіемъ вычитаемаго. Это можно выразить еще такъ: 1) *Убавокъ разности равенъ прибавку вычитаемаго.* 2) *Прибавокъ разности равенъ убавку вычитаемаго.*

Увеличивъ въ предыдущемъ примѣрѣ вычитаемое 3 единицами, получимъ:

$$17-8=9$$

Откуда видимъ, что разность уменьшилась на 3 единицы.

Уменьшивъ вычитаемое 3 единицами, получимъ:

$$17-2=15$$

Откуда видимъ, что разность увеличилась на 3 единицы.

Изъ предыдущаго слѣдуетъ, что

C) *Разность не измѣняется, если уменьшаемое и вычитаемое одновременно увеличимъ или уменьшимъ какимъ-нибудь числомъ.*

Увеличивая или уменьшая тремя единицами одновременно уменьшаемое и вычитаемое, получимъ:

$$20-8=12$$

или

$$14-2=12$$

Разность 12 осталась въ обоихъ случаяхъ безъ измѣненія.

§ 37. **Измѣненіе произведенія.** Если множителя увеличимъ въ нѣсколько разъ, число равныхъ слагаемыхъ увеличится во столько же разъ, и мы получимъ новое произведеніе болѣе прежняго. Чтобы получить новое произведеніе, нужно прежнее произведеніе увеличить во столько разъ, во сколько мы увеличили множителя.

Отсюда заключаемъ. что, если увеличимъ множителя въ нѣсколько разъ, произведеніе увеличится во столько же разъ. Это правило имѣетъ мѣсто и для множимаго, ибо порядокъ производителей не имѣетъ вліянія на произведеніе.

Изъ предложенныхъ соображеній слѣдуетъ:

1) *Если увеличимъ одного изъ производителей въ какое-нибудь число разъ, произведеніе увеличится во столько же разъ.*

Примѣръ. Увеличивая въ произведеніи

$$6\times4=24$$

множимое вдвое, имѣемъ:

$$12\times4=48$$

Увеличивая множителя вдвое, имѣемъ:

$$6\times8=48$$

Въ обоихъ случаяхъ произведеніе увеличилось вдвое. Точно также

2) *Если одного изъ множителей уменьшимъ во сколько-*

нибудь разъ, произведеніе тоже уменьшится во столько же разъ.

Произведенія: $3 \times 4 = 12$
$6 \times 2 = 12$

вдвое менѣе произведенія $6 \times 4 = 24$, ибо одинъ изъ множителей первыхъ двухъ произведеній вдвое менѣе какого-нибудь множителя послѣдняго произведенія.

3) *Произведеніе не измѣнится, если одновременно одного множителя увеличимъ, а другого уменьшимъ въ одно и то же число разъ.*

Такъ, въ произведеніи 6×4, увеличивая перваго производителя и уменьшая второго вдвое, видимъ, что произведеніе $12 \times 2 = 24$ не измѣнилось.

Чтобы выразить такую зависимость двухъ чиселъ, по которой оба они одновременно увеличиваются или уменьшаются въ одно и то же число разъ, говорятъ, что *два числа измѣняются въ прямомъ отношеніи*. Когда два числа находятся въ такой зависимости, что съ увеличиваніемъ одного другое уменьшается въ одно и то же число разъ и обратно, тогда говорятъ, что *два числа измѣняются въ обратномъ отношеніи.*

Произведеніе и каждый изъ производителей измѣняются въ прямомъ отношеніи.

§ 38. **Измѣненіе частнаго.** Въ случаѣ дѣленія на-цѣло, дѣлимое равно произведенію дѣлителя на частное. Частное есть одинъ изъ производителей.

Частное можетъ измѣняться отъ измѣненія дѣлимаго и дѣлителя.

A) Измѣненія частнаго отъ измѣненія одного дѣлимаго. Оставляя одного производителя постояннымъ, мы знаемъ, что произведеніе одновременно увеличивается или уменьшается съ другимъ производителемъ; слѣд., *если, оставляя дѣлителя безъ перемѣны, увеличимъ дѣлимое во сколько-нибудь разъ, частное увеличится во столько же разъ; если дѣлимое уменьшимъ во сколько-нибудь разъ,—частное уменьшится во столько же разъ.*

Эти правила показываютъ, что *дѣлимое и частное измѣняются въ прямомъ отношеніи.*

B) Измѣненія частнаго отъ измѣненія одного дѣлителя. Произведеніе остается безъ перемѣны, если одного производителя увеличимъ, а другого уменьшимъ въ одинаковое число разъ, и обратно; слѣд., *если, оставляя дѣлимое безъ перемѣны, увеличимъ дѣлителя во сколько-нибудь разъ, частное уменьшится во столько же разъ; если дѣлителя уменьшимъ во сколько-нибудь разъ,—частное увеличится во столько же разъ.*

Эти правила показываютъ, *что дѣлитель и частное измѣняются въ обратномъ отношеніи.*

Такъ, въ примѣрѣ

$$12 : 6 = 2$$

увеличивая дѣлителя вдвое, имѣемъ:

$$12 : 12 = 1$$

Откуда видимъ, что частное уменьшилось вдвое.

Уменьшая дѣлителя вдвое, имѣемъ:

$$12 : 3 = 4$$

Откуда видимъ, что частное увеличилось вдвое.

Изъ предыдущихъ правилъ вытекаетъ, что

C) *Частное не измѣняется, если дѣлимое и дѣлителя одновременно увеличимъ или уменьшимъ въ одно и то же число разъ.*

Такъ, въ примѣрѣ

$$12 : 6 = 2$$

увеличивая одновременно дѣлимое и дѣлителя втрое, имѣемъ:

$$36 : 18 = 2.$$

Уменьшая ихъ втрое, имѣемъ:

$$4 : 2 = 2.$$

Частное въ обоихъ случаяхъ осталось безъ перемѣны.

VI. Сложныя ариѳметическія дѣйствія. Скобки.

§ 39. Кромѣ четырехъ основныхъ, существуетъ очень много сложныхъ ариѳметическихъ дѣйствій. Они происходятъ отъ сочетанія основныхъ дѣйствій и потому не носятъ никакихъ особенныхъ названій. Иногда результатъ ариѳметическихъ дѣйствій между числами обозначаютъ только знаками, не производя самаго вычисленія. Это бываетъ всякій разъ, когда обращаютъ главное вниманіе на самую связь между числами.

Въ такомъ случаѣ результаты четырехъ основныхъ ариѳметическихъ дѣйствій между числами 6 и 2 изобразятся въ видѣ:

сумма,	разность,	произведеніе,	частное
$6 + 2$	$6 - 2$	6×2	$6 : 2$ или $\frac{6}{2}$

Сложное дѣйствіе. *Дѣйствіе, составленное изъ сочетанія основныхъ, называютъ сложнымъ дѣйствіемъ.*

Результаты сложныхъ дѣйствій, выраженные при помощи однихъ знаковъ, бываютъ весьма разнообразны. Такъ, результатъ сложнаго дѣйствія, въ которомъ нужно 6 умножить на 7, а затѣмъ приложить къ произведенію число 5, выразится въ видѣ:

$$6 \,.\, 7 + 5$$

Дѣйствіе, въ которомъ изъ суммы чиселъ 5 и 6 нужно вычесть 3, выразится въ видѣ:

$$5 + 6 - 3$$

Дѣйствіе, въ которомъ изъ произведенія 6 на 5 нужно вычесть произведеніе 3 на 7, выразится въ видѣ:

$$6 \,.\, 5 - 3 \,.\, 7$$

Ариѳметическое выраженіе. *Результатъ одного или нѣсколькихъ ариѳметическихъ дѣйствій, выраженный одними знаками, называютъ ариѳметическимъ выраженіемъ.*

Членъ. Въ ариѳметическомъ выраженіи каждое число, соединенное съ другими числами знаками + или —, называютъ *членомъ.*

Ариѳметическое выраженіе по числу входящихъ въ него членовъ называютъ одночленомъ, двучленомъ и вообще многочленомъ.

Такъ, ариѳметическія выраженія:

$$6 \,.\, 5\,,\ 9 \,.\, 8 : 6 \text{ или } \frac{9 \,.\, 8}{6}$$

будутъ одночленами.

Ариѳметическія выраженія:

$$6-5,\ 7+3,\ 6\ .\ 7+5,\ 6\ .\ 5-3\ .\ 7$$

будутъ двучленами.

Сумма и разность двухъ чиселъ суть двучлены.

Ариѳметическое выраженіе:

$$6\ .\ 5\ .\ 4+3\ .\ 7-2\ .\ 9$$

будетъ многочленомъ.

Скобки. *При дѣйствіяхъ съ ариѳметическими выраженіями употребляютъ скобки.*

Чтобы означить, что данное ариѳметическое дѣйствіе нужно выполнить надъ ариѳметическимъ двучленомъ или многочленомъ, помѣщаютъ его между скобками или, какъ обыкновенно выражаются, заключаютъ его въ скобки.

При этомъ скобкамъ даютъ начертаніе:

( ), [ ],

Такъ, напримѣръ, чтобы показать, что нужно сумму чиселъ 5 и 6 умножить на 7, пишутъ:

$$(5+6)\ .\ 7$$

Чтобы уяснить значеніе скобокъ, вычислимъ сначала величину выраженія $(5+6)\ .\ 7$ и затѣмъ величину выраженія $5+6\ .\ 7$, въ которомъ скобки опущены.

Въ первомъ случаѣ, умножая сумму 5+6 на 7, имѣемъ $(5+6)\ .\ 7=77$.

Во второмъ случаѣ нужно умножить на 7 только 6, и въ результатѣ получимъ:

$$5+6\ .\ 7=47$$

Если нужно выполнить дѣйствіе надъ нѣсколькими многочленами, заключаютъ ихъ всѣхъ въ скобки.

Такъ, чтобы умножить ариѳметическое выраженіе 6 . 5—7 на сумму 6+8, пишутъ:

$$(6.5-7).(6+8)$$

Если изъ произведенія 3.9 нужно вычесть произведеніе разности 6—2 на сумму 2+3, пишутъ:

$$3.9-(6-2)(2+3)$$

Если нужно все это послѣднее выраженіе раздѣлить на сумму 2+5, пишутъ

$$[(3.9-(6-2)(2+3)]:(2+5)$$

При помощи скобокъ легко написать ариѳметическое выраженіе по данной зависимости между числами и найти его величину.

Чтобъ опредѣлить результатъ сложнаго ариѳметическаго дѣйствія, нужно каждое выраженіе, а въ выраженіи каждый членъ вычислять отдѣльно.

Такъ, опредѣляя величину выраженія

$$[3.9-(6-2)(2+3)]:(2+5)$$

мы замѣняемъ ариѳметическія выраженія

6—2, 2+3, 2+5 числами

6—2=4, 2+3=5, 2+5=7

Сдѣлавъ это, имѣемъ:

$$(3.9-4.5):7.$$

Замѣняя члены 3.9 и 4.5 числами

3.9=27, 4.5=20, имѣемъ:

$$(27-20):7$$

или 7 : 7=1

Иногда прибѣгаютъ къ скобкамъ при дѣйствіи надъ одночленами. Такъ, желая указать, что частное 6 : 3 нужно умножить на 5, пишутъ (6 : 3)×5.

Скобки ввелъ въ первый разъ *Альбертъ Жирардъ* (1629 г.).

VII. Именованныя числа.

МѢРЫ.

§ 40. *Именованными* называются числа, имѣющія наименованія. Наименованіе или названіе числа получаютъ отъ тѣхъ величинъ, которыя они выражаютъ. *Величиною* называютъ все то въ предметѣ, что при своемъ измѣненіи можетъ быть измѣряемо. Каждый предметъ порождаетъ въ насъ понятіе о стольких различныхъ величинахъ, сколько существуетъ способовъ разсматривать его измѣненія. *Математика есть наука о величинахъ. Въ математикѣ разсматриваютъ только измѣряемыя величины, то-есть такія, для которыхъ существуютъ единицы сравненія и пріемы измѣренія.*

Мѣры. Каждый родъ величинъ имѣетъ свою постоянную единицу, съ которою сравниваются всѣ однородныя величины. Въ каждой странѣ существуютъ для каждаго рода величинъ такія единицы, установленныя закономъ или обычаемъ. Ихъ называютъ *мѣрами*.

Имѣя въ виду дать понятіе о какомъ-нибудь предметѣ, обращаютъ на него вниманіе по отношенію ко *времени, пространству, вѣсу и стоимости*. Сообразно съ этимъ, существуютъ *мѣры времени, мѣры пространства, мѣры вѣса и мѣры стоимости*.

Кромѣ этихъ главныхъ, существуютъ мѣры для различныхъ частныхъ случаевъ, напр., мѣры для измѣренія бумаги и т. д. Однородныя величины измѣряютъ различными единицами, смотря по размѣрамъ самой величины. Такъ, большой промежутокъ времени измѣряютъ *вѣками*, *годами*, малый промежутокъ—*минутами*, *секундами*.

Однородныя единицы бываютъ болѣе или менѣе крупными. Обыкновенно крупная единица содержитъ цѣлое число мелкихъ.

Знаменательное число. *Цѣлое число, опредѣляющее, сколько крупная единица содержитъ мелкихъ, называютъ знаменательнымъ числомъ.* Такъ, сажень имѣетъ 3 аршина; знаменательное число въ этомъ примѣрѣ есть 3. Знаменательное число называютъ также *единичнымъ отношеніемъ*, ибо оно выражаетъ отношеніе между однородными единицами.

Таблицы мѣръ. *Таблицы, выражающія взаимную связь между однородными единицами, называются таблицами мѣръ.* Въ нихъ приведены названія различныхъ единицъ и соотвѣтствующія имъ знаменательныя числа.

Таблицы мѣръ.

1. МѢРЫ ВРЕМЕНИ

§ 41. Вѣкъ или столѣтіе имѣетъ 100 лѣтъ.

Годъ	365 дней (високосный 366 дней).
Годъ	12 мѣсяцевъ.
Мѣсяцъ	30 сут. или дней.
Недѣля	7 сутокъ.
Сутки	24 часа.
Часъ	60 минутъ.
Минута	60 секундъ.

Простой и високосный годъ. Годъ, имѣющій 365 дней, называется *простымъ*, а 366 дней - *високоснымъ*. Въ нашемъ лѣтосчисленіи годы считаются отъ Рождества Христова. Всякій четвертый годъ отъ Рождества Христова называется *високоснымъ*. Чтобъ опредѣлить, будетъ ли данный годъ високоснымъ, нужно число года раздѣлить на 4. Если при дѣленіи не получится остатка, данный годъ есть високосный; полученный остатокъ выражаетъ, что годъ простой, и указываетъ мѣсто, занимаемое имъ въ ряду трехъ простыхъ годовъ, слѣдующихъ за високоснымъ. Такимъ образомъ, опредѣляя, будетъ ли 1874-й годъ високоснымъ, дѣлимъ 1874 на 4. Послѣ дѣленія получаемъ въ остаткѣ 2, слѣдовательно, 1874-ый есть годъ простой и второй послѣ високоснаго.

Мѣсяцы идутъ въ слѣдующемъ порядкѣ:

Январь	имѣетъ	31	день.
Февраль	„	28	дней въ простомъ году.
	„	29	„ въ високосномъ году.
Мартъ	„	31	день.
Апрѣль	„	30	дней.
Май	„	31	день.
Іюнь	„	30	дней.
Іюль	„	31	день.
Августъ	„	31	день.
Сентябрь	„	30	дней.
Октябрь	„	31	день.
Ноябрь	„	30	дней.
Декабрь	„	31	день.

Юліанское и Григоріанское лѣтосчисленіе. Наше лѣтосчисленіе, въ которомъ каждый четвертый годъ есть високосный, называется *Юліанскимъ.* Оно было введено Юліемъ Цезаремъ въ 45 году до Рождества Христова и предполагаетъ годъ или время одного обращенія земли около солнца въ 365 дней и 6 часовъ. Въ западной Европѣ принято лѣтосчисленіе, въ которомъ считаются високосными всѣ четвертые годы кромѣ тѣхъ лѣтъ, выражающихъ столѣтія, въ которыхъ число столѣтій не дѣлится на 4. Это лѣтосчисленіе называется *Григоріанскимъ.* Оно предполагаетъ болѣе правильно годъ въ 365 дней 5 часовъ 48 мин. 50 сек. и введено папою Григоріемъ XIII въ 1582 году. Наше лѣтосчисленіе отстаетъ отъ Григоріанскаго на 12 дней.

Старый и новый стиль. Юліанское лѣтосчисленіе называется также *старымъ*, а Григоріанское *новымъ стилемъ.* Чтобы получить время по новому стилю, нужно присоединить къ нашему времени 12 дней. 1-е января, день нашего новаго года, считается въ западной Европѣ за 13-е января.

Простой годъ имѣетъ 52 недѣли и 1 день, а високосный 52 недѣли и 2 дня.

Сутки начинаются съ 12 часовъ ночи. Это время называется *полночью.* 12 часовъ дня называется *полуднемъ.* Отъ полуночи до полудня и отъ полудня до полуночи часы считаютъ отъ 1 до 12. Приборы для измѣренія времени называются *часами*, *хронометрами.*

II. МѢРЫ ПРОСТРАНСТВА.

§ 42. Разсматривать предметы по отношенію къ пространству мы можемъ различными способами.

Такъ, опредѣляя длину нити, размѣры картины или вмѣстимость ящика, мы должны прибѣгать къ различнымъ единицамъ.

1. Для опредѣленія длины нити мы пользуемся *мѣрами длины*.

2. Понятіе о размѣрахъ картины или величинѣ поля мы получаемъ, разсматривая ихъ поверхности. Для измѣренія ихъ существуютъ *мѣры поверхностей*.

3. Для опредѣленія вмѣстимости ящика или бочки, мы должны знать объемъ ящика или емкость бочки. Для этого существуютъ *мѣры объемовъ или емкости*.

Такимъ образомъ, по отношенію къ пространству мы имѣемъ: *мѣры длины*, *мѣры поверхностей и мѣры объемовъ или емкости*.

Разсмотримъ эти мѣры отдѣльно:

1. Мѣры длины.

Миля географическая	имѣетъ		7	верстъ.
Верста	„	„	500	саженъ.
Сажень	„	„	3	аршина.
Аршинъ	„	„	16	верш. или 4 четв.
Четверть	„	„	4	вершка.
		или		
Сажень	„	„	7	футовъ.
Футъ	„	„	12	дюймовъ.
Дюймъ	„	„	10	линій.

2. Мѣры поверхностей.

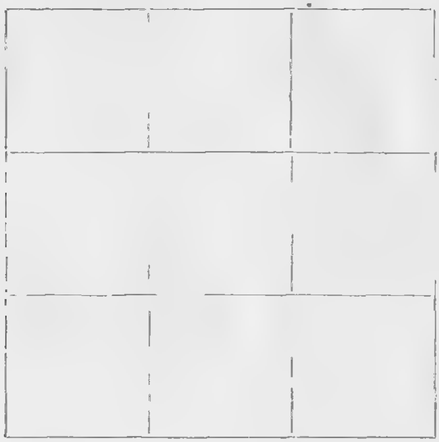
Желая дать понятіе о размѣрахъ картины или величинѣ поля, измѣряютъ ихъ поверхность. Для этого существуютъ особыя единицы, называемыя *мѣрами поверхностей*.

Поверхности измѣряются особыми четвероугольниками, называемыми *квадратами*. *Квадратъ есть четвероугольникъ, у котораго всѣ четыре стороны и четыре угла равны*. Такой четвероугольникъ составляетъ *квадратную площадь*. Эта площадь получаетъ различныя названія, смотря по длинѣ ея стороны. Если длина каждой стороны квадрата — сажень, площадь называется *квадратною саженью*; если длина каждой стороны квадрата—аршинъ, площадь называется *квадратнымъ аршиномъ*. Подобнымъ образомъ площадь квадрата называется квадратною верстою, квадратнымъ футомъ, если въ каждой сторонѣ квадрата — верста, футъ.

Каждый изъ такихъ квадратовъ принимается за единицу площадей или поверхностей. Понятіе о величинѣ площади составляютъ, опредѣляя, сколько данныхъ квадратовъ можетъ въ ней помѣститься. Такъ, желая дать понятіе о величинѣ картины, беремъ квадратный вершокъ и опредѣляемъ, сколько разъ онъ помѣщается въ поверхности картины. Если онъ помѣщается въ картинѣ 12 разъ, мы говоримъ: поверхность или площадь данной картины имѣетъ 12 квадратныхъ вершковъ.

Квадратная верста, квадратная сажень и т. д. называются *квадратными мѣрами*.

Чтобы опредѣлить, сколько квадратныхъ аршинъ содержится въ квадратной сажени, разобьемъ всѣ стороны квадратной сажени на 3 части, по аршину въ каждой, и соединимъ противоположныя точки дѣленія.



Тогда квадратная сажень разобьется на 9 меньшихъ квадратовъ. Это видно изъ того, что въ большомъ квадратѣ всѣ квадраты расположены въ три ряда и въ каждомъ ряду заключаются по три квадрата. Сторона каждаго изъ этихъ квадратовъ есть аршинъ, слѣдовательно, квадратная сажень содержитъ 9 квадратныхъ аршинъ. Чтобы узнать, сколько квадратныхъ аршинъ содержитъ квадратная сажень, нужно знаменательное число 3 умножить само на себя, то-есть взять квадратъ 3. Подобное же разсужденіе имѣетъ мѣсто для всѣхъ квадратныхъ единицъ. Такимъ образомъ, имѣемъ слѣдующую таблицу квадратныхъ мѣръ, или мѣръ поверхностей.

Квадратная географическая миля имѣетъ
49 квадратныхъ верстъ (т.-е. $7 \times 7 = 49$).
Квадратная верста имѣетъ 250000 кв. с. (500×500).
Квадратная сажень имѣетъ 9 квадр. арш. (3×3).
Квадратный аршинъ имѣетъ 256 кв. верш. (16×16).
Квадратная сажень имѣетъ 49 кв. футовъ (7×7).
Квадратный футъ имѣетъ 144 кв. дюймовъ (12×12).
Квадратный дюймъ имѣетъ 100 кв. линій (10×10).

Десятина. Поверхность полей у насъ измѣряютъ *десятиной*. Десятина содержитъ 2400 квадр. саженъ. Это есть площадь прямого четвероугольника, въ одной сторонѣ котораго содержится 60, а въ другой 40 саженъ, или прямоугольника, длина котораго 60, а ширина 40 саженъ. Десятину также выражаетъ прямоугольникъ, имѣющій въ длину 80, а въ ширину 30 саженъ. Въ обоихъ случаяхъ произведенія этихъ чиселъ равны: $2400 = 40 \times 60 = 80 \times 30$.

3. Мѣры объемовъ.

Чтобы дать понятіе о вмѣстимости комнаты, нужно измѣрить ея объемъ. Для этого существуютъ особыя *мѣры объемовъ*, или *кубическія мѣры*.

Кубъ. Объемы измѣряются особымъ тѣломъ, называемымъ *кубомъ*. Кубъ имѣетъ форму прямого ящика, ограниченнаго шестью равными квадратами. Эти квадраты называются *сторонами* куба. Стороны куба пересѣкаются по прямымъ линіямъ, называемымъ *ребрами*. Реберъ въ кубѣ 12. Ребра пересѣкаются на 8 точкахъ, которыя составляютъ 8 угловъ куба. Вмѣстимость или объемъ куба, у котораго всѣ ребра равны сажени, называется *кубическою са-*

женью. Кубъ, у котораго каждое ребро равно аршину или который ограниченъ шестью квадратными аршинами, называется кубическимъ аршиномъ. Вообще кубы по длинѣ своего ребра получаютъ названіе кубической версты, кубическаго вершка и т. д. Кубическая верста, сажень и т. д. называются *кубическими единицами*, или *кубическими мѣрами.*

Чтобы опредѣлить вмѣстимость комнаты, нужно взять какую-нибудь кубическую мѣру, напр., кубическій футъ, и опредѣлить, сколько такихъ кубическихъ футовъ можетъ помѣститься въ комнатѣ. Положимъ, въ комнатѣ помѣщается 1000 кубическихъ футовъ. Въ этомъ случаѣ говорятъ, что объемъ комнаты равенъ 1000 кубическихъ футовъ.

Чтобы найти, сколько кубическихъ аршинъ содержитъ кубическая сажень, опредѣляютъ, сколько кубическихъ аршинъ можетъ помѣститься въ кубической сажени. Сторона кубической сажени есть квадратная сажень, а сторона кубическаго аршина есть квадратный аршинъ. Въ квадратной сажени содержится 9 квадратныхъ аршинъ, слѣд., на днѣ кубической сажени можно уставить 9 кубическихъ аршинъ. Всѣ эти 9 кубическихъ аршинъ вмѣстѣ составятъ слой, занимающій въ высоту одинъ аршинъ. Въ кубической сажени содержится такихъ слоевъ три, слѣд., въ кубической сажени можетъ помѣститься 9×3 или 27 кубическихъ аршинъ, то-есть $3\times3\times3$.

Чтобъ узнать, сколько кубическихъ аршинъ содержится въ кубической сажени, нужно знаменательное число 3 помножить само на себя 3 раза, то-есть взять кубъ 3.

Подобное разсужденіе имѣетъ мѣсто для всѣхъ кубическихъ единицъ.

Принимая это въ соображеніе, мы имѣемъ слѣдующую таблицу кубическихъ мѣръ, или мѣръ объемовъ:

Кубическая миля (географическая) содержитъ
343 куб. верстъ (то-есть $7 \times 7 \times 7$)

Кубич. верста содержитъ 125000000 кубич. саж. ($500 \times 500 \times 500$).

Кубич. сажень содержитъ 27 куб. арш. ($3 \times 3 \times 3$).

Кубич. арш. содержитъ 4096 куб. в. ($16 \times 16 \times 16$).

Кубич. сажень содержитъ 343 куб. фут. ($7 \times 7 \times 7$).

Кубич. футъ содержитъ 1728 куб. д. ($12 \times 12 \times 12$).

Кубич. д. содержитъ 1000 куб. линій ($10 \times 10 \times 10$).

Къ мѣрамъ объема или мѣрамъ емкости нужно отнести *мѣры сыпучихъ и мѣры жидкихъ тѣлъ.*

4. Мѣры сыпучихъ тѣлъ.

Ластъ содержитъ 12 четвер. или кулей.
Четв. имѣетъ 2 осьмины или 8 четвериковъ.
Четверикъ содержитъ 8 гарнцевъ.

5. Мѣры жидкихъ тѣлъ.

Бочка содержитъ 40 ведеръ.
Ведро „ 10 штофовъ.
Штофъ „ 2 полушт. или кружки.

III. МѢРЫ ВѢСА.

§ 43. Мѣры вѣса раздѣляются на *мѣры торговаго и мѣры аптекарскаго вѣса.*

1. Мѣры торговаго вѣса.

Берковецъ	имѣетъ	10	пудовъ.
Пудъ	„	40	фунтовъ.
Фунтъ	„	32	лота или 96 золотниковъ.
Лотъ	„	3	золотника.
Золотникъ	„	96	долей.

2. Мѣры аптекарскаго вѣса.

Аптекарскій фунтъ	имѣетъ	12	унцій или 84 золот.
Унція	„	8	драхмъ.
Драхма	„	3	скруп. или 60 гран.
Скрупулъ	„	20	грановъ.

Приборы для измѣренія вѣса называются *вѣсами*.

IV. МѢРЫ СТОИМОСТИ ИЛИ МОНЕТЫ.

Монеты въ Россіи бываютъ *серебряныя*, *золотыя* и *мѣдныя*.

а) Серебряныя монеты.

Рубль	имѣетъ	100	копѣекъ или 2 полтины.
Полтинникъ	„	50	коп. или 2 четвертака.
Четвертакъ	„	25	коп.
Двугривенный	„	20	коп.
Пятиалтыный	„	15	коп.
Гривенникъ	„	10	коп.
Пятачокъ	„	5	коп.

b) Золотыя монеты.

Имперіалъ	имѣетъ	10	руб.
Полуимперіалъ	„	5	руб.
Червонецъ	„	3	руб.

Мѣдныя монеты бываютъ въ 5 коп., 3 коп., 2 коп., 1 коп., въ полкопѣйки и въ четверть копѣйки.

Кромѣ того, употребляются названія:

Алтынъ	имѣетъ	3	коп.
Грошъ	„	2	коп.
Копѣйка	„	2	денежки.
Денежка	„	2	полушки.

Проба. Серебряныя и золотыя монеты не дѣлаются изъ чистаго серебра и золота. Для большей прочности въ обращеніи къ нимъ подмѣшиваютъ мѣдь, свинецъ и другіе недорогіе металлы. *Количество золотниковъ чистаго серебра или золота на фунтъ сплава называютъ пробою.* Такимъ образомъ, золотомъ 56 пробы называютъ сплавъ, содержащій въ фунтѣ сплава 56 золотниковъ чистаго золота и 40 золотниковъ другихъ металловъ.

Лигатура. Эту примѣсь другихъ металловъ называютъ *лигатурой.* У насъ чеканится золотая монета 88-й и серебряная 48 пробы (съ 1867 года).

Кромѣ монетъ, существуютъ еще *деньги бумажныя:*

a) въ 100 рублей *радужнаго* цвѣта съ портретомъ Императрицы Екатерины II-й.
b) въ 50 рублей *сѣраго* цвѣта.
c) въ 25 рублей *бураго* цвѣта.
d) въ 10 рублей *краснаго* цвѣта.
e) въ 5 рублей *синяго* цвѣта.
f) въ 3 рубля *зеленаго* цвѣта.
g) въ 1 рубль *желтаго* цвѣта.

Мѣры бумаги.

Для измѣренія бумаги служатъ:

Стопа имѣетъ 20 дестей или 480 листовъ.

Десть „ 24 листа.

Мѣры окружности.

Окружность раздѣляется на 360 равныхъ частей, изъ которыхъ каждая часть называется *градусомъ.*

Окружность имѣетъ 360 градусовъ.

Градусъ „ 60 минутъ.

Минута „ 60 секундъ.

§ 44. **Простыя и составныя именованныя числа.** Именованныя числа происходятъ отъ измѣренія какой-нибудь величины. Чтобы измѣрить величину, сравниваютъ ее съ единицею.

Для измѣренія можно выбрать какую-угодно однородную единицу.

Обыкновенно выбираютъ такую единицу, чтобы результатъ измѣренія выражался наименьшимъ цѣлымъ числомъ.

Простое именованное число. Если выбранная единица содержится въ измѣряемой величинѣ ровное число разъ, результатъ измѣренія выразится только одною мѣрою, и полученное число называется *простымъ именованнымъ числомъ.*

Такъ, положимъ, для измѣренія длины веревки мы выбрали аршинъ и нашли, что аршинъ укладывается по длинѣ веревки ровно 2 раза, тогда результатъ измѣренія, 2 *аршина*, есть простое именованное число.

Составное именованное число. Если же при этомъ измѣреніи, кромѣ двухъ аршинъ, мы получили еще остатокъ менѣе аршина, его измѣряютъ вершкомъ, то-есть мѣрою, меньшею аршина. Положимъ, что вершокъ содержится въ остаткѣ 7 разъ, тогда результатъ измѣренія опредѣляется нѣсколькими числами, выраженными въ различныхъ мѣрахъ. Въ этомъ случаѣ результатъ измѣренія будетъ 2 аршина и 7 вершковъ.

Такое число называется *составнымъ именованнымъ числомъ*.

Чтобы выразить письменно составное именованное число, помѣщаютъ рядомъ всѣ мѣры, начиная съ высшихъ, и послѣ каждой пишутъ сокращенно ея названіе. Иногда эти наименованія отдѣляютъ знакомъ +.

Такъ, 3 года 14 дней 6 часовъ 3 минуты изображаютъ *письменно*:

3 г. 14 дн. 6 час. 3 мин.
или 3 г. + 14 дн. + 6 час. + 3 мин.

Раздробленіе именованныхъ чиселъ.

§ 45. Привести простое именованное число 6 пуд. въ лоты или составное именованное число 3 дня 5 час. 7 мин. въ минуты—значитъ *раздробить* именованное число.

Опредѣленіе. *Раздробленіе есть приведеніе чиселъ большаго наименованія въ числа меньшаго.*

Зная таблицы мѣръ, очень легко сдѣлать раздробленіе.

Для этого послѣдовательно приводятъ крупныя мѣры въ слѣдующія мелкія и поступаютъ такъ до тѣхъ поръ, пока не обратятъ всего именованнаго числа въ мѣры требуемаго меньшаго наименованія.

1. *Раздробляя простое именованное число 6 пудовъ въ лоты,* мы прежде обращаемъ пуды въ фунты. Для этого умножаемъ 6 на знаменательное число 40, ибо пудъ имѣетъ 40 фунтовъ.

Въ результатѣ получаемъ 240 фунтовъ.

Раздробляемъ фунты въ лоты. Умножая для этого на знаменательное число 32, получаемъ 7680 лотовъ.

Ходъ вычисленія изображаютъ *письменно*:

$$\begin{array}{rl} 6 & \text{(пуд.)} \\ \times\ 40 & \\ \hline 240 & \text{(фун.)} \\ \times\ 32 & \\ \hline 480 & \\ 720 & \\ \hline 7680 & \text{(лотовъ)} \end{array}$$

2. *Раздробляя составное именованное число* 3 дня 5 час. 7 мин. въ минуты, мы ходъ вычисленія выражаемъ *письменно:*

$$\begin{array}{rccl} \overset{\text{дни}}{3} & \overset{\text{час.}}{5} & \overset{\text{мин.}}{7} & = 4627 \text{ минутъ.} \\ \times\ 24 & & & \\ \hline 72 & \text{(час.)} & & \\ +\ \ 5 & & & \\ \hline 77 & \text{(час.)} & & \\ \times\ 60 & & & \\ \hline 4620 & \text{(мин.)} & & \\ +\ \ 7 & & & \\ \hline 4627 & \text{(мин.)} & & \end{array}$$

Словесно: a) раздробляемъ дни въ часы. Для этого умножая 3 на знаменательное число 24, получаемъ 72 часа. Прикладывая 5 часовъ, получаемъ 77 часовъ.

b) *Раздробляемъ часы въ минуты*, для чего умножаемъ 77 на 60; получаемъ 4620 минутъ. Прикладывая 7 минутъ, получаемъ 4627 минутъ.

Изъ предложенныхъ примѣровъ выводимъ слѣдующее

Правило: 1) *Чтобы раздробить простое именованное число, нужно послѣдовательно крупныя мѣры обращать въ слѣдующія мелкія, умножая для этого каждый разъ на знаменательное число.*

2) *Чтобы раздробить составное именованное число, нужно обращать число наибольшаго въ слѣдующее меньшее наименованіе, умножая для этого на знаменательное число, и приложить число того же наименованія, если оно находится въ составномъ именованномъ числѣ; полученный результатъ нужно снова привести въ слѣдующее меньшее наименованіе и продолжать раздробленіе до тѣхъ поръ, пока не получимъ числа требуемаго наименованія.*

Замѣчаніе. Чтобы не смѣшивать раздробленія съ умноженіемъ именованныхъ чиселъ, можно выписывать данныя задачи и производить вычисленіе на сторонѣ. Но, такъ какъ при ариѳметическихъ дѣйствіяхъ стараются упрощать и сокращать вычисленія, то лучше прямо пользоваться данными самой задачи и располагать вычисленіе такъ, какъ это указано выше. Чтобы указать, что присоединяемъ наименованія для памяти, мы ихъ заключаемъ въ скобки.

Превращеніе именованныхъ чиселъ.

§ 46. Привести 17328 вершковъ въ сажени значитъ *превратить* вершки въ сажени.

Опредѣленіе. *Превращеніе есть приведеніе чиселъ* *меньшаго наименованія въ числа большаго. Превращеніе есть дѣйствіе, обратное раздробленію.*

Чтобы сдѣлать превращеніе, нужно послѣдовательно меньшія мѣры превращать въ слѣдующія большія.

Такъ, чтобъ обратить 17328 вершковъ въ сажени, сначала a) *превращаемъ вершки въ аршины.* Аршинъ имѣетъ 16 вершковъ, поэтому дѣлимъ 17328 на 16; получаемъ въ частномъ 1083 аршина.

Затѣмъ b) *превращаемъ аршины въ сажени*, для чего дѣлимъ частное 1083 на 3. Послѣ дѣленія получаемъ въ частномъ 361 саженъ.

Ходъ вычисленія выражается *письменно*:

17328 в. | 16
16 | 1083 ар. | 3
132 | 9 | 361 саж.
128 | 18
48 | 18
48 | 3
„„ | 3
„

17328 вер. = 361 саженямъ.

Обращая 392475 секундъ въ дни, ходъ вычисленія выражаемъ *письменно*:

392475 сек. | 60
360 | 6541 мин. | 60
324 | 60 | 109 час. | 24
300 | 541 | 96 | 4 дня.
247 | 540 | 13 час.
240 | 1 мин.
75
60
15 сек.

Словесно: a) *превращаемъ секунды въ минуты.* Для этого дѣлимъ 392475 на 60,—получаемъ въ частномъ 6541 и въ остаткѣ 15; слѣд., 392475 секундъ составляютъ 6541 мин. и 15 сек.

b) *Превращаемъ 6541 мин. въ часы.* Для этого дѣлимъ 6541 на 60, получаемъ въ частномъ 109 и въ остаткѣ 1; слѣд., 392475 сек. составляютъ 109 час. 1 мин. 15 сек.

c) *Превращаемъ 109 час. въ сутки*, для чего дѣлимъ 109 на 24; получаемъ въ частномъ 4 и въ остаткѣ 13.

Итакъ

392475 сек. = 4 дн. 13 час. 1 мин. 15 сек.

Изъ предложенныхъ примѣровъ выводимъ слѣдующее

Правило: A) *Чтобы сдѣлать превращеніе, нужно послѣдовательно мелкія мѣры обращать въ слѣдующія крупныя, раздѣляя на соотвѣтствующее знаменательное число.*

B) *Полученное частное выражаетъ число единицъ слѣдующаго высшаго наименованія, а остатокъ указываетъ число мелкихъ мѣръ, которыя не могутъ составить и одной крупной.*

C) *Съ полученнымъ частнымъ нужно поступать точно также и продолжать превращеніе до тѣхъ поръ, пока это возможно.*

D) *Послѣднее частное вмѣстѣ со всѣми остатками выразитъ искомое составное именованное число.*

Замѣчаніе. Смыслъ и значеніе самаго вычисленія не позволяютъ смѣшивать превращенія съ дѣленіемъ. Располагать вычисленіе такъ, какъ это сдѣлано у насъ, заставляютъ удобство и простота вычисленія.

Повѣрка раздробленія и превращенія. Раздробленіе и превращеніе суть дѣйствія обратныя, поэтому они взаимно повѣряются, т.-е. раздробленіе повѣряется превращеніемъ, а превращевіе раздробленіемъ.

Чтобы повѣрить раздробленіе, нужно сдѣлать превращеніе; если получится данное составное именованное число, раздробленіе сдѣлано вѣрно.

Чтобы повѣрить превращеніе, нужно раздробить составное именованное число; если получимъ данное простое именованное число, превращеніе сдѣлано вѣрно.

Четыре дѣйствія съ цѣлыми именованными числами.

Сложеніе именованныхъ чиселъ.

§ 47. *Складывать можно только однородныя именованныя числа.*

Чтобы сложить составныя именованныя числа: 3 в. 410 с. 2 ар. 14 верш., 5 верстъ 1 арш. 10 верш. и 2 версты 75 саж. 2 арш. 3 верш., подписываемъ ихъ одно подъ другимъ такъ, чтобы числа одного наименованія находились въ одномъ вертикальномъ столбцѣ, и проводимъ черту.

Второе слагаемое не имѣетъ саженъ, поэтому во второмъ слагаемомъ ставимъ вмѣсто саженъ 0.

Ходъ вычисленія выразится *письменно:*

верст.	саж.	арш.	верш.
	2	1	
3 +	410 +	2 +	14
5 +	0 +	1 +	10
2 +	75 +	2 +	3
10 +	487 +	0 ×	11

1) $\begin{array}{r|l} 27 \text{ верш.} & 16 \\ \underline{16} & \overline{1 \text{ арш.}} \\ 11 \text{ верш.} & \end{array}$ 2) $\begin{array}{r|l} 6 \text{ ар.} & 3 \\ \underline{6} & \overline{2 \text{ саж.}} \\ 0 & \end{array}$

Словесно: а) *начинаемъ сложеніе съ вершковъ,* единицъ меньшаго наименованія: 14 + 10 + 3 составляютъ 27 вершковъ; 27 болѣе 16 — знаменательнаго числа, поэтому вершки превращаемъ въ аршины. Раздѣляя 27 на 16, получаемъ въ частномъ 1 аршинъ и въ остаткѣ 11 вершковъ. Одинъ аршинъ присоединяемъ къ аршинамъ и подписываемъ подъ вершками остатокъ 11.

b) *Складываемъ аршины:* 1+2+1+2 составляютъ 6 аршинъ; 6 болѣе знаменательнаго числа 3,—превращаемъ аршины въ сажени. Раздѣляя 6 на 3, получаемъ въ частномъ 2 сажени и въ остаткѣ 0.

Присоединяемъ къ саженямъ 2 и подписываемъ подъ аршинами 0.

c) *Складываемъ сажени:* 2+410+0+75 составляютъ 487 саженъ; 487 менѣе знаменательнаго числа 500, то-есть 487 саженъ менѣе одной версты. Подписываемъ подъ саженями 487.

d) *Складываемъ версты:* 3+5+2=10. Подписываемъ подъ верстами 10.

И такъ, сумма будетъ 10 верстъ 487 саж. 11 верш.

Изъ предложеннаго примѣра выводимъ слѣдующее

Правило: А) *Чтобъ сдѣлать сложеніе именованныхъ чиселъ, нужно подписать слагаемыя одно подъ другимъ такъ, чтобы числа одного наименованія находились въ одномъ вертикальномъ столбцѣ, и начинать сложеніе съ чиселъ меньшаго наименованія.*

В) *Если въ суммѣ получится число менѣе знаменательнаго числа, его подписываютъ подъ тѣмъ же столбцомъ.*

C) *Если же полученная сумма болѣе знаменательнаго числа, ее превращаютъ въ слѣдующее наименованіе, раздѣляя на знаменательное число. Остатокъ подписываютъ подъ тѣмъ же столбцомъ, а частное придаютъ къ слѣдующему столбцу.*

D) *Послѣдовательно переходя отъ мелкихъ мѣръ къ крупнымъ, продолжаютъ сложеніе до тѣхъ поръ, пока не получатъ полной суммы.*

Вычитаніе именованныхъ чиселъ.

§ 48. *Вычитать можно только однородныя именованныя числа.* Чтобы вычесть составное именованное число 7 берк. 6 пуд. 17 фун. 29 зол. изъ 9 берк. 7 пуд. 11 фун. 30 зол., подписываемъ вычитаемое подъ уменьшаемымъ такъ, чтобы числа одного наименованія находились въ одномъ вертикальномъ столбцѣ, и проводимъ черту.

Ходъ вычисленія выразится *письменно:*

бер.	пуд.	фун.	зол.
	.	51	
9 +	7 +	11 +	30
—7 +	6 +	17 +	29
2 +	0 +	34 +	1

Словесно:

a) *Начинаемъ вычитаніе съ золотниковъ*, — единицъ меньшаго наименованія: 30 безъ 29 даютъ въ остаткѣ 1. Подписываемъ подъ золотниками 1.

b) *Вычитаемъ фунты*: 17 нельзя вычесть изъ 11; занимаемъ у слѣдующаго наименованія одинъ пудъ, что и обозначаемъ точкою, поставленною надъ 7. Обращаемъ пуды въ фунты и прикладываемъ 40 къ 11 фунтамъ. Вычитая 17 изъ суммы 51, получаемъ въ остаткѣ 34 фун. Подписываемъ подъ фунтами 34.

c) *Вычитаемъ пуды*: 6 безъ 6 составляетъ 0. Подписываемъ подъ пудами 0.

d) *Вычитаемъ берковцы*: 9 безъ 7 составляетъ 2. Подписываемъ подъ берковцами 2

Разность=2 берк. 34 фунт. 1 зол.

Примѣръ. Вычесть 9 недѣль 3 дня 2 мин. изъ 12 недѣль.

Не имѣя въ уменьшаемомъ дней, часовъ и минутъ, а въ вычитаемомъ—часовъ, пишемъ вмѣсто этихъ наименованій нули.

Ходъ вычисленія выразится *письменно:*

$$\begin{array}{rcrcrcr} \text{нед.} & & \text{дни.} & & \text{часы.} & & \text{мин.} \\ & & 7 & & 24 & & 60 \\ 12 & + & 0 & + & 0 & + & 0 \\ -\ 9 & + & 3 & + & 0 & + & 2 \\ \hline 2 & + & 3 & + & 23 & + & 58 \end{array}$$

Словесно:

a) *Вычитаемъ минуты:* 2 изъ нуля нельзя вычесть. Занимаемъ единицу у слѣдующаго большаго наименованія. Такъ какъ въ уменьшаемомъ нѣтъ ни часовъ, ни дней, то занимаемъ одну недѣлю, обращаемъ ее въ дни, написавъ надъ столбцомъ дней 7

У дней опять занимаемъ одинъ день и обращаемъ его въ часы; у часовъ занимаемъ одинъ часъ и обращаемъ его въ минуты. Занимая, всякій разъ обозначаемъ это точкою. Число съ точкою считаемъ на единицу меньше. 60 безъ 2 составляетъ 58; подписываемъ подъ минутами 58.

Вычитаемъ часы: 23 безъ 0 составляетъ 23. Подписываемъ подъ часами 23.

Вычитаемъ дни: 6 безъ 3 составляетъ 3. Подписываемъ подъ днями 3.

Вычитаемъ недѣли: 11 безъ 9 составляетъ 2. Подписываемъ подъ недѣлями 2.

Разность=2 нед. 3 дн. 23 час. 58 мин.

Изъ предложенныхъ примѣровъ выводимъ

Правило: A) *Чтобы сдѣлать вычитаніе именованныхъ чиселъ, нужно вычитаемое подписать подъ уменьшаемымъ такъ, чтобы числа одного наименованія находились въ одномъ вертикальномъ столбцѣ, провести черту и начинать вычитаніе съ чиселъ меньшаго наименованія.*

B) *Если вычитаемое менѣе уменьшаемаго, его вычитаютъ и подписываютъ остатокъ подъ тѣмъ же столбцомъ.*

C) *Если какія-нибудь мѣры вычитаемаго болѣе соотвѣтствующихъ мѣръ уменьшаемаго, занимаютъ единицу у слѣдующаго большаго наименованія; раздробивъ ее, прибавляютъ къ тѣмъ мѣрамъ, изъ которыхъ нельзя было вычесть, и дѣлаютъ такимъ образомъ вычитаніе возможнымъ.*

D) *Послѣдовательно переходя влѣво отъ мелкихъ мѣръ къ болѣе крупнымъ, продолжаютъ вычитаніе до тѣхъ поръ, пока не получатъ полной разности.*

Умноженіе именованныхъ чиселъ.

§ 49. *Множить можно только именованное число на отвлеченное*, ибо умножить величину значитъ взять ее слагаемымъ нѣсколько разъ и найти сумму. Въ произведеніи всегда получается именованное число, однородное съ множимымъ. Чтобъ умножить 3 вер.

29 саж. 1 ар. 7 верш. на 3, нужно взять составное именованное число слагаемымъ три раза и найти сумму.

Умноженіе, подобно сложенію, нужно начинать съ чиселъ меньшаго наименованія; для этого множителя 3 подписываютъ подъ вершками.

При умноженіи ходъ вычисленія выразится *письменно:*

$$
\begin{array}{cccccccc}
\text{верст.} & & \text{саж.} & & \text{арш.} & & \text{верш.} \\
 & & 1 & & 1 & & \\
3 & + & 29 & + & 1 & + & 7 \\
 & & & & & \times & 3 \\
\hline
9 & + & 88 & + & 1 & + & 5
\end{array}
$$

1) $\begin{array}{r|l} 21 & 16 \\ \cline{2-2} \underline{16} & 1 \text{ ар.} \\ 5 \text{ верш.} & \end{array}$ 2) $\begin{array}{r|l} 3 & \\ \underline{+1} & \\ 4 & 3 \\ \cline{2-2} \underline{3} & 1 \text{ саж.} \\ 1 \text{ арш.} & \end{array}$ 3) $\begin{array}{r} 29 \\ \underline{\times\ 3} \\ 87 \\ \underline{+1} \\ 88 \end{array}$

Словесно:

a) *Умножаемъ вершки:* 7×3 составляетъ 21 верш.; превращаемъ вершки въ аршины, для чего, раздѣливъ на знаменательное число 16, находимъ въ остаткѣ 5 верш. и въ частномъ 1 арш. Частное 1 придаемъ къ слѣдующему произведенію, а въ столбцѣ вершковъ подписываемъ 5.

b) *Умножаемъ аршины:* 1×3=3; 3 да 1 аршинъ отъ предыдущаго частнаго составляютъ 4 арш. Раздѣливъ на знаменательное число 3, находимъ въ остаткѣ 1 ар. и въ частномъ 1 сажень. Остатокъ 1 подписываемъ подъ аршинами, а частное 1 придаемъ къ слѣдующему произведенію.

c) *Умножаемъ сажени:* 29×3=87 да 1 составляютъ 88 саж.; 88 менѣе знаменательнаго числа 500, поэтому подписываютъ въ столбцѣ саженъ 88.

d) *Умножаемъ версты:* 3×3 сост. 9 верстъ. Подписываемъ подъ верстами 9.

Произведеніе=9 верст. 88 саж. 1 арш. 5 вершк.

П р и м ѣ р ъ. Умножимъ 5 пуд. 29 фун. 34 зол. на 17.

$$\begin{array}{r}
\text{пуд.}\ \ \text{фун.}\ \ \text{зол.} \\
12\qquad 6\qquad\ \ \\
5+29+34 \\
\times 17 \\
\hline
97+19+\ \ 2
\end{array}$$

1)
$$\begin{array}{r}
34 \\
\times 17 \\
\hline
238 \\
+\,34 \\
\hline
578 \\
576 \\
\hline
2\ \text{зол.}
\end{array}
\qquad
\begin{array}{l|l}
578 & 96 \\ \hline
576 & 6\ \text{ф.}
\end{array}$$

2)
$$\begin{array}{r}
29 \\
\times 17 \\
\hline
203 \\
+\,29 \\
\hline
493 \\
+\,6 \\
\hline
499\ \text{ф.} \\
40 \\
\hline
99 \\
80 \\
\hline
19
\end{array}
\qquad
\begin{array}{r|l}
499\ \text{ф.} & 40 \\ \hline
 & 12\ \text{пуд.}
\end{array}$$

3)
$$\begin{array}{r}
5 \\
\times 17 \\
\hline
85 \\
+\,12 \\
\hline
97\ \text{п.}
\end{array}$$

Здѣсь всѣ частныя дѣйствія умноженія мы производили отдѣльно на сторонѣ. При этомъ цифрами 1, 2 и 3 обозначали порядокъ послѣдовательныхъ дѣйствій.

Произведеніе = 97 пуд. 19 фун. 2 зол.

Изъ предложенныхъ примѣровъ выводимъ слѣдующее

Правило: А) *Чтобы умножить именованное число на отвлеченное, нужно множителя подписать подъ меньшимъ наименованіемъ множимаго, поставить слѣва знакъ умноженія и провести черту. Умноженіе нужно начинать съ чиселъ меньшаго наименованія.*

В) *Если произведеніе менѣе знаменательнаго числа, его подписываютъ подъ умножаемыми мѣрами множимаго.*

С) *Если же произведеніе болѣе знаменательнаго числа, его дѣлятъ на знаменательное число; остатокъ подписываютъ подъ тѣми же мѣрами, а частное присоединяютъ къ произведенію слѣдующихъ мѣръ на множителя.*

D) *Послѣдовательно переходя влѣво отъ мелкихъ мѣръ къ крупнымъ, продолжаютъ умноженіе до тѣхъ поръ, пока не получатъ полнаго произведенія.*

Дѣленіе именованныхъ чиселъ.

§ 50. Къ дѣленію вообще прибѣгаютъ въ двухъ случаяхъ: 1) когда хотятъ узнать, сколько разъ одна величина *содержится* въ другой, и 2) когда желаютъ *раздѣлить* данную величину на нѣсколько равныхъ частей.

Оба эти случая для отвлеченныхъ чиселъ не имѣютъ вліянія на ходъ и пріемы вычисленія. Для именованныхъ чиселъ оба эти требованія имѣютъ разное значеніе, поэтому при дѣленіи ихъ существуютъ два случая.

а) *Дѣленіе именованнаго числа на именованное*—и

b) *Дѣленіе именованнаго числа на отвлеченное.*

Разсмотримъ эти два случая отдѣльно:

1. Дѣленіе именованнаго числа на именованное.

Дѣлить можно только однородныя именованныя числа.

При дѣленіи именованнаго числа на именованное, частное есть число отвлеченное. Оно выражаетъ, сколько разъ одна величина содержится въ другой.

Опредѣлимъ, сколько разъ обернется колесо на протяженіи 121 саж. 6 ф. 6 д. 5 линій, если окружность колеса равна 3 ф. 6 д. 5 лин.? Чтобы рѣшить этотъ вопросъ, нужно опредѣлить, сколько разъ 3 ф. 6 д. 5 л. содержатся въ 121 с. 6 ф. 6 д. 5 л.

Для этого дѣлимъ 121 с. 6 ф. 6 д. 5 л. на 3 ф. 6 д. 5 л.

Чтобы сдѣлать это дѣленіе, раздробляютъ дѣлимое и дѣлителя въ одно и то же наименованіе, потомъ дѣлятъ какъ отвлеченныя числа. Здѣсь мы дѣлимое и дѣлителя раздробляемъ въ линіи.

Ходъ вычисленія выразится *письменно:*

121 с. + 6 ф. + 6 д. + 5 л. :	3 ф. 6 д. 5 л.
× 7	× 12
847 ф.	36
+ 6	+ 6
853	42 д.
× 12	× 10
1706	420 лин.
853	+ 5
10236	425 л.
+ 6	
10242 д.	
× 10	
102420 л.	
+ 5	
102425 лин.	

Раздѣляя 102425 на 425, имѣемъ въ частномъ 241

```
102425 | 425
 850   |----
------ | 241
 1742
 1700
------
   425
   425
   ---
   „„„
```

Колесо можетъ обернуться на данномъ протяженіи 241 разъ.

Изъ предложеннаго примѣра выводимъ слѣдующее

Правило: *Чтобы раздѣлить именованное число на именованное, нужно дѣлимое и дѣлителя раздробить въ одинакія мѣры и потомъ дѣлить какъ отвлеченныя числа. Частное, будучи отвлеченнымъ числомъ, выражаетъ, сколько разъ дѣлитель содержится въ дѣлимомъ.*

II. Дѣленіе именованнаго числа на отвлеченное.

При дѣленіи именованнаго числа на отвлеченное частное есть число именованное, ибо въ этомъ случаѣ разбиваютъ, или раздѣляютъ, дѣлимое на нѣсколько равныхъ частей.

Чтобы раздѣлить составное именованное число 12 недѣль 3 д. 19 ч. 6 м. на 6, располагаемъ дѣйствіе въ такомъ порядкѣ, въ какомъ мы располагали его при дѣленіи отвлеченныхъ чиселъ. Дѣленіе распадается на рядъ отдѣльныхъ дѣйствій, въ которыхъ мы послѣдовательно отыскиваемъ всѣ наименованія частнаго.

Начинаемъ дѣленіе съ чиселъ бо̀льшаго наименованія. Ходъ вычисленія выразится *письменно:*

12 н.+3 д.+19 ч.+6 м.	6
12	2 н.+0 д.+15 ч.+11 м.

„ „ 3 д.
× 24
72 ч.
+ 19
91 ч.
6
31
30
1 ч.
60
60 м.
+ 6
66 м.
6
6
6
„

Словесно:

a) *Отыскиваемъ недѣли частнаго.* Недѣли частнаго могутъ происходить отъ раздѣленія числа недѣль дѣлимаго на дѣлителя. Раздѣляя 12 на 6, получаемъ *въ частномъ 2 недѣли.* Вычитая произведеніе 2 на 6 изъ дѣлимаго, получаемъ въ остаткѣ 0.

b) *Отыскиваемъ дни частнаго.* 6 въ 3 не содержится,—пишемъ *въ частномъ 0* дней.

c) *Отыскиваемъ часы частнаго.* Раздробляемъ дни въ часы. Умножая 3 на 24 и присоединяя 19 часовъ дѣлимаго, получаемъ 91 часъ. Раздѣляя 91 на 6, получаемъ въ остаткѣ 1 часъ и въ *частномъ 15 часовъ.*

b) *Отыскиваемъ минуты частнаго.* Раздробляя 1 часъ въ минуты и присоединяя 6 минутъ, получаемъ 66 минутъ.

Раздѣляя 66 на 6, получаемъ 11 и пишемъ *въ частномъ 11 минутъ.*

Частное=2 нед. 15 ч. 11 м.

Изъ предложеннаго примѣра выводимъ слѣдующее

Правило: А) *Чтобы раздѣлить именованное число на отвлеченное, нужно начинать дѣленіе съ единицъ большаго наименованія.*

B) *Если дѣлитель не содержится или если получится остатокъ, раздробляютъ единицы большаго въ единицы слѣдующаго меньшаго наименованія, къ полученному произведенію присоединяютъ однородныя единицы дѣлимаго и раздѣляютъ на дѣлителя.*

C) *Съ остаткомъ поступаютъ подобнымъ же образомъ и продолжаютъ дѣленіе до тѣхъ поръ, пока не получатъ полнаго частнаго.*

VIII. Приложеніе ариѳметическихъ дѣйствій къ рѣшенію задачъ.

§ 51. Ариѳметическія дѣйствія прилагаются къ рѣшенію различныхъ задачъ. Во всякой задачѣ существуютъ данныя и искомыя величины. Эти величины связаны между собою различными условіями.

Рѣшить задачу значитъ опредѣлить искомыя величины по даннымъ. Чтобы рѣшить задачу, нужно вникнуть въ условія задачи. Условія задачи опредѣляютъ ту ариѳметическую связь, которая должна существовать между данными и искомыми. Зная эту связь, легко найти рѣшеніе задачи.

Прежде, чѣмъ рѣшать задачу, необходимо составить планъ рѣшенія задачи.

Составить планъ рѣшенія задачи значитъ составить ясное понятіе о характерѣ и порядкѣ ариѳметическихъ дѣйствій, необходимымъ для рѣшенія задачи. Когда составленъ планъ, легко найти ариѳметическое выраженіе, рѣшающее задачу.

Имѣя планъ рѣшенія задачи, можно приступить къ самому вычисленію искомой величины.

Задачи можно раздѣлить на *простыя* и *сложныя.*

Простыя задачи требуютъ для рѣшенія одного изъ 4-хъ основныхъ дѣйствій. *Сложными* называются такія задачи, для рѣшенія которыхъ нужно сложное ариѳметическое дѣйствіе, то-есть сочетаніе основныхъ дѣйствій. Сложная задача состоитъ изъ нѣсколькихъ простыхъ.

Значеніе ариѳметическихъ дѣйствій. Общая связь между условіями задачи и ариѳметическими дѣйствіями опредѣляется смысломъ и значеніемъ каждаго дѣйствія.

При сложеніи двухъ чиселъ одно число *увеличивается какимъ-нибудь числомъ*, и въ случаѣ нѣсколькихъ слагаемыхъ, сумма равна всѣмъ числамъ, взятымъ вмѣстѣ. При умноженіи одно число *увеличивается въ нѣсколько разъ.* При вычитаніи одно число *уменьшается какимъ-нибудь числомъ*, а при дѣленіи цѣлыхъ чиселъ одно число *уменьшается въ нѣсколько разъ.*

Это значеніе ариѳметическихъ дѣйствій указываетъ, въ какихъ простыхъ задачахъ каждое изъ нихъ имѣетъ мѣсто.

§ 52. **Простыя ариѳметическія задачи.** Разсмотримъ подробно каждое изъ простыхъ ариѳметическихъ дѣйствій и приведемъ нѣсколько простыхъ задачъ, уясняющихъ примѣненіе каждаго дѣйствія.

Сложеніе. Складывать число нужно всякій разъ:

a) когда одно число нужно *увеличить* какимъ-нибудь числомъ, или когда къ одному числу нужно *прибавить* другое;

b) когда нѣсколько чиселъ нужно соединить въ одно.

Задача 1. Нѣкто имѣетъ имущество, состоящее изъ дома, мебели, картинъ и лошадей. Домъ стоитъ 47215 руб., мебель 2215 руб., картины 5207 руб., лошади 1925 руб. Что стоитъ все имущество?

Отв. 56562 руб.

Задача 2. Въ одной библіотекѣ 1015 книгъ, въ другой 117 книгами больше. Сколько книгъ во второй библіотекѣ?

Отв. 1132.

Вычитаніе. Вычитаютъ всякій разъ:

a) когда требуется опредѣлить разность между числами;

b) когда нужно уменьшить одно число другимъ

Складывать и вычитать можно только числа однородныя.

Задача 3. Въ Петербургѣ 927 тысячъ жителей, въ Москвѣ 750 тысячъ. На сколько тысячъ въ Москвѣ менѣе жителей?

Отв. на 177 тысячъ.

Задача 4. Первый крестовый походъ былъ въ 1096 году, а послѣдній въ 1270 году. Сколько лѣтъ продолжались крестовые походы?

Отв. 174 года.

Умноженіе. Умножаютъ числа всякій разъ, когда требуется:

a) одно число увеличить въ нѣсколько разъ;

b) повторить одно число столько разъ, сколько въ другомъ содержится единицъ.

Во всякомъ умноженіи произведеніе однородно съ множимымъ, а множитель есть число отвлеченное.

Задача 5. Въ мастерской каждый изъ 28 рабочихъ получаетъ въ мѣсяцъ жалованья по 15 руб. Сколько получаютъ всѣ рабочіе?

Отв. 420 рублей.

Задача 6. Въ книгѣ 175 страницъ. Каждая страница имѣетъ 22 строки. Сколько строкъ въ книгѣ?

Отв. 3850 строкъ.

Дѣленіе. Дѣлить цѣлыя числа нужно всякій разъ, когда требуется:

a) *раздѣлить* число на нѣсколько равныхъ частей;

b) опредѣлить, сколько разъ меньшее число *содержится* въ большемъ;

c) уменьшить одно число въ нѣсколько разъ.

Задача 7. Нѣкто заработалъ въ годъ 3648 рублей. Сколько зарабатываетъ онъ въ мѣсяцъ?

Отв. 304 рубля.

Задача 8. Кусокъ матеріи въ 26 аршинъ стоитъ 468 рублей. Что стоитъ аршинъ?

Отв. 18 рублей.

Задача 9. Найти число меньше 175 въ 25 разъ.

Отв. 7.

Раздробленіе именованныхъ чиселъ.

Задача 10. На земномъ шарѣ каждую секунду умираетъ одинъ человѣкъ. Сколько умретъ въ 17 дней 5 час 1 сек.?

Отв. 1486801 человѣкъ.

Превращеніе именованныхъ чиселъ.

Задача 11. Имѣя пудовыя, фунтовыя и золотниковыя гири, опредѣлить наименьшее число гирь, необходимое для того, чтобъ отвѣсить 5000 золотниковъ.

Отв. 5000 зол. = 1 п. 12 ф. 8 зол. Гирь нужно 1+12+8=21.

Сложенiе именованныхъ чиселъ. *Задача 12.* Сколько золота въ трехъ слиткахъ, если первый вѣситъ 3 п. 12 ф. 17 л. 1 зол., второй 2 п. 35 ф. 11 л. 1 зол. и третiй 17 ф. 2 зол.

Отв. 6 п. 24 ф. 29 л. 1 зол.

Вычитанiе именованныхъ чиселъ. *Задача 13.* Отъ куска матерiи въ 5 с. 3 ф. 2 лин. отрѣзанъ кусокъ въ 2 с. 5 ф. 7 д. 1 л. Опредѣлить, сколько остается матерiи?

Отв. 2 с. 4 ф. 5 д. 1 л.

Особенности при вычисленiяхъ съ временемъ. Задачи на сложенiе и вычитанiе именованныхъ чиселъ, содержащiя время, представляютъ нѣкоторыя особенности.

Способы выражать время. Время обыкновенно выражаютъ составнымъ именованнымъ числомъ. Число это означаетъ, сколько лѣтъ, мѣсяцевъ, дней протекло отъ Рождества Христова, начала христiанской эры. Такимъ образомъ, 1860 годъ 17 мая 7 часовъ утра означаютъ составнымъ именованнымъ числомъ:

1859 л. 4 м., 16 д. 7 час.,

и, обратно, составное именованное число 1839 л. 11 м. 15 д. 18 час. означаетъ 1840-й годъ 16-е декабря 6 часовъ вечера, потому что сутки считаются отъ полуночи. Отъ полуночи до полудня прошло 12 часовъ, да 6 часовъ прошло отъ полудня до 6 часовъ вечера.

Сложенiе именованныхъ чиселъ, выражающихъ время. При рѣшенiи задачъ на сложенiе именованныхъ чиселъ, выражающихъ время, обыкновенно приходится опредѣлять *по одному событію и промежутку времени между даннымъ и послѣдующимъ событіемъ время второго.*

Задача 14. Нѣкто родился въ 1827 году апрѣля 14. Опредѣлить, когда ему было 32 года 5 мѣсяц. 25 д.

Складывая 2 составныхъ именованныхъ числа, имѣемъ:

$$\begin{array}{l} 1826 \text{ л.} + 3 \text{ м.} + 13 \text{ дн.} \\ \quad 32 \quad + 5 \quad\ + 25 \\ \hline 1858 \quad + 9 \quad\ + \ 8 \end{array}$$

Искомое время составляетъ 1859-й г. октября 9-го.

При вычисленіяхъ со временемъ нужно обращать вниманіе на то обстоятельство, что мѣсяцы въ году не имѣютъ одинаковаго числа дней. Число дней въ мѣсяцѣ бываетъ различно; поэтому, когда приходится, складывая дни, обращать ихъ въ мѣсяцы, нужно принять въ соображеніе величину одного или нѣсколькихъ послѣднихъ мѣсяцевъ.

Въ предложенной задачѣ, если прибавить къ составному именованному числу 1826 л. 3 м. 13 д. только 32 г. 5 м., будемъ имѣть 1858 л. 8 м. 13 дн., то-есть 1859-й годъ сентября 14-го.

Послѣ этого нужно еще прибавить 25 дней. Сентябрь имѣетъ 30 дней, слѣдовательно, черезъ 25 дней наступитъ 9-е октября 1859-года.

Если же мы имѣемъ одно событіе 26 августа 1812 года, а другое наступаетъ черезъ годъ 6 мѣсяцевъ и 23 дня, вычисленіе приметъ другой видъ.

Прикладывая къ составному именованному числу 1811 л. 7 м. 25 дн. только 1 г. 6 м., получимъ составное именованное число 1813 л. 1 м. 25 дн., означающее 26 февраля 1814 года. Если послѣ этого времени пройдетъ еще 23 дня, время событія вычисляется слѣдующимъ образомъ. Февраль 1814 г. имѣетъ 28 дней, слѣдовательно, при сложеніи именованныхъ чиселъ имѣемъ:

$$\begin{array}{rrr} 1811 \text{ л.} & + 7 \text{ м.} & + 25 \text{ дн.} \\ 1 & + 6 & + 23 \\ \hline 1813 \text{ л.} & + 2 \text{ м.} & + 20 \text{ дн.} \end{array}$$

то-есть время другого событія будетъ 1814 года марта 21-го.

Если при сложеніи и вычитаніи именованныхъ чиселъ, содержащихъ время, нужно обратить вниманіе на величину послѣдняго мѣсяца, необходимо приложить только годы и мѣсяцы, а затѣмъ, опредѣливъ, къ какому мѣсяцу относится вычисленіе дня, прикладываютъ или вычитаютъ дни и часы.

Вычитаніе именованныхъ чиселъ, выражающихъ время. При вычитаніи именованныхъ чиселъ, содержащихъ время, приходится:

a) *опредѣлить промежутокъ времени между двумя данными событіями*, или b) *по промежутку времени между даннымъ и предшествующимъ событіемъ — время послѣдняго.*

Къ первому роду относится

Задача 15. Нѣкто отправился въ кругосвѣтное путешествіе 14 іюня 1839 года и возвратился 15-го апрѣля 1844 года. Сколько времени продолжалось путешествіе?

Въ этомъ случаѣ обыкновенно выражаютъ время составнымъ именованнымъ числомъ, содержащимъ только годы и дни. Такъ поступаютъ потому, что мѣсяцы въ году содержатъ неодинаковое число дней. Начало путешествія 14 іюня 1839 года мы выражаемъ слѣдующимъ образомъ: сложивъ всѣ дни, содержащіеся въ мѣсяцахъ, протекшихъ съ января, имѣемъ:

въ январѣ 31, въ февралѣ 28 дней (1839 годъ — простой), въ мартѣ 31, въ апрѣлѣ 30, въ маѣ 31 день, итого 151 день.

Присоединяя 13 дней іюня, имѣемъ 164 дня, слѣдовательно, начало путешествія опредѣляется составнымъ именованнымъ числомъ 1838 л. 164 дня.

Подобнымъ же образомъ для конца путешествія имѣемъ въ январѣ 31, февралѣ 29 (1844 годъ—високосный), мартѣ 31 и 14 дней апрѣля, всего 105 дней. Конецъ путешествія выражается составнымъ именованнымъ числомъ: 1843 г. 105 дн.

Вычитая эти именованныя числа, получимъ:

$$
\begin{array}{r}
470 \\
1843\text{ г.}+105\text{ дн.} \\
-1838 \quad +164 \\
\hline
4\text{ г.}+306\text{ дн.}
\end{array}
$$

Путешествіе продолжалось 4 года 306 дней.

Ко второму роду относится

Задача 16. Нѣкто имѣетъ 27 іюля 1872 г. 27 лѣтъ 165 дней. Опредѣлить время рожденія.

Время 27 іюля 1872 г. выражается въ дняхъ и годахъ составнымъ именованнымъ числомъ 1871 г. 208 дней. Вычитая 27 л. 165 д., имѣемъ въ остаткѣ 1844 г. 43 дн. Это число выражается 13 февраля 1845 года.

Умноженіе именованныхъ чиселъ.

Задача 17. Куплено 7 кусковъ мѣди, каждый вѣсомъ въ 4 ф. 15 л. 1 з. 15 д. Найти вѣсъ этихъ 7 кусковъ.

Отв. 31 ф. 12 л. 1 зол. 9 д

Дѣленіе именованныхъ чиселъ.

а) *Дѣленіе именованнаго числа на именованное.*

Задача 18. Сколько выйдетъ ложекъ изъ куска серебра, вѣсомъ въ 2 ф. 30 л. 48 д., если каждая ложка вѣситъ 4 лот. 2 зол. 12 дол.?

Отв. 20 ложекъ.

b) *Дѣленіе именованнаго числа на отвлеченное.*

Задача 19. Поѣздъ пробѣгаетъ въ 8 час. 185 вер. 423 с. 6 ф. 4 д. Сколько онъ пробѣгаетъ въ часъ?

Отв. 23 вер. 115 саж. 3 ф. 5 д.

§ 53. **Сложныя ариѳметическія задачи.** При рѣшеніи сложныхъ задачъ обращаютъ вниманіе на планъ рѣшенія и составъ задачи, ариѳметическое выраженіе, ее разрѣшающее, и на самое вычисленіе искомой величины.

Къ задачамъ на сложныя ариѳметическія дѣйствія должна быть отнесена

Задача 20. Нѣкто, имѣя капиталу 8998 р., купилъ 15 десятинъ пахатной земли по 125 руб., 37 десятинъ лугу по 112 руб., 5 лошадей по 147 руб. На всѣ остальныя деньги онъ купилъ лѣсу по 132 руб. за десятину. Сколько десятинъ лѣсу купилъ онъ?

Планъ рѣшенія задачи. Чтобъ опредѣлить, сколько лѣсу купилъ онъ, нужно найти, сколько у него оставалось денегъ отъ прежнихъ покупокъ.

Для этого нужно отыскать, сколько онъ истратилъ на эти покупки.

Составъ задачи. Легко опредѣлить *составъ этой сложной задачи.* Наша сложная задача распадается на слѣдующія 6 простыхъ задачъ, изъ которыхъ

· *Первая задача* опредѣляетъ, что заплатилъ онъ за пахатную землю, и рѣшается *умноженіемъ.*

Вторая задача, опредѣляетъ, что заплатилъ онъ за лугъ, и рѣшается *умноженіемъ.*

Третья задача опредѣляетъ, что заплатилъ онъ за лошадей, и рѣшается *умноженіемъ.*

Четвертая задача опредѣляетъ, сколько денегъ истратилъ онъ на всѣ эти покупки, и рѣшается *сложеніемъ.*

Пятая задача опредѣляетъ, сколько у него осталось денегъ послѣ этихъ покупокъ, и рѣшается *вычитаніемъ.*

Шестая задача опредѣляетъ, сколько десятинъ лѣсу купилъ онъ на остальныя деньги, и рѣшается *дѣленіемъ.*

Ариѳметическое выраженіе задачи. Ариѳметическое выраженіе, рѣшающее нашу задачу, найти очень легко, если найдены ариѳметическія выраженія, разрѣшающія всѣ простыя задачи.

1-я задача рѣшается ариѳметическимъ выраженіемъ: 125×15.

2-я задача: 112×37.

3-я задача: 147×5.

4-я задача: $125 \times 15 + 112 \times 37 + 146 \times 5$ (а).

Ариѳметическое выраженіе, разрѣшающее *5-ю задачу*, получится, если изъ 8998 вычтемъ ариѳметическое выраженіе (а). Для обозначенія этого заключаемъ его въ скобки. Сдѣлавъ это, получаемъ выраженіе:

$$8998-(125\times15+112\times37+147\times5).$$

6-я задача разрѣшается, если послѣднее ариѳметическое выраженіе раздѣлимъ на 132.

Ариѳметическое выраженіе, разрѣшающее нашу задачу, будетъ

$$[8998-(125\times15+112\times37+147\times5)] : 132$$

Вычисленіе задачи. Можно найти численное рѣшеніе данной задачи, или опредѣляя числовую величину ариѳметическаго выраженія, разрѣшающаго задачу, или отыскивая отдѣльно рѣшенія всѣхъ простыхъ задачъ, на которыя распадается наша сложная задача.

При началѣ вычисленія обыкновенно располагаютъ данныя величины задачи въ извѣстномъ порядкѣ.

Такъ, въ нашемъ примѣрѣ, данныя задачи могутъ быть расположены слѣдующимъ образомъ:

Данныя: капиталъ: 8998 р.

куплено:

15 дес. пах. земли	по	125 р.
37 дес. лугу	„	112 „
5 лош.	„	147 „
лѣсъ	„	132 „

Искомое: число десятинъ лѣсу.

Ходъ вычисленія располагаютъ *письменно*:

1)
$$\begin{array}{r} 125 \\ \times\ 15 \\ \hline 165 \\ 125 \\ \hline 1875 \end{array}$$

2)
$$\begin{array}{r} 112 \\ \times\ 37 \\ \hline 784 \\ 336 \\ \hline 4144 \end{array}$$

3)
$$\begin{array}{r} 147 \\ \times\ 5 \\ \hline 735 \end{array}$$

```
4)   1875              5)  8998
   + 4144                 —6754
      735
    ─────                  2244
     6754

6)    2244 | 132
      132  |─────
     ───── | 17 дес. лѣсу.
      924
      924
     ─────
       ""
```

Отв. Куплено 17 десятинъ лѣсу.

Здѣсь мы при каждомъ отдѣльномъ вычисленіи ставили нумеръ. Онъ указываетъ на порядокъ вычисленія и обозначаетъ ту простую задачу, которая разрѣшается каждымъ отдѣльнымъ дѣйствіемъ. Обыкновенно при рѣшеніи задачъ содержатъ въ умѣ тѣ предварительныя соображенія, которыя мы выставили на видъ, и прямо приступаютъ къ самому вычисленію.

Порядокъ при вычисленіяхъ. При рѣшеніи задачъ всегда слѣдуетъ соблюдать порядокъ въ расположеніи вычисленій. Этотъ порядокъ позволяетъ ясно видѣть связь между данными и искомыми задачи, даетъ возможность легко обозрѣвать всю задачу, отыскать ошибки при вычисленіяхъ и ускоряетъ самый ходъ вычисленій.

IX. Прибавленія.

I. Краткія историческія свѣдѣнія о нумераціи.

§ 54. Клинообразная нумерація. Еще халдеи и вавилоняне имѣли письменные знаки для изображенія чиселъ. Ихъ нумерація носитъ названіе *кли-*

нообразной и встрѣчается на гробницахъ древнихъ персидскихъ царей.

Гіероглифическая нумерація. Египтяне приписываютъ изобрѣтеніе ариѳметики миѳическому лицу Тоту (Ѳоту). Они имѣли десятичное счисленіе еще при Фра-Сезострисѣ. Египетская нумерація носитъ названіе *гіероглифической*. Египтяне обозначали единицу, десятокъ, сотню и тысячу особыми знаками, *гіероглифами*. Нѣсколько единицъ, десятковъ, сотенъ и тысячъ изображались простымъ повтореніемъ этихъ знаковъ.

Китайская нумерація. Къ числу древнѣйшихъ нужно отнести также нумерацію *китайскую*. По увѣренію китайцевъ, они пользуются ею со временъ Фуги, китайскаго императора, жившаго за 300 лѣтъ до Р. Х. Въ этой нумераціи первыя девять чиселъ изображаются особыми знаками. Существовали также знаки для обозначенія 10, 100, 1000. Большія числа писались колоннами сверху внизъ.

Финикійская нумерація. Наконецъ, къ древнѣйшимъ нужно отнести еще нумерацію *финикійскую*. Финикіяне, сравнительно съ египтянами, совершили реформу въ нумераціи въ томъ смыслѣ, что замѣнили гіероглифы буквами своего алфавита. Этою нумераціею пользовались и евреи.

Финикіяне и евреи изображали первыя девять чиселъ и первые девять десятковъ 18 начальными буквами своего алфавита и писали большія числа отъ правой руки къ лѣвой.

Въ самомъ Египтѣ была оставлена гіероглифическая нумерація и введены сначала гіератическая, а потомъ для всеобщаго употребленія демотическія письмена (за 600 л. до Р. Х.). Въ *гіератической* нумераціи три первыя числа очень сходны съ настоящими цифрами.

Греческая, римская и церковно-славянская нумерація. Греки переняли у финикіянъ систему изображать числа буквами. Нѣкоторые утверждаютъ, что до тѣхъ поръ они изображали числа тѣми самыми знаками, которые извѣстны подъ именемъ римской нумераціи, и что *римская* нумерація есть, такимъ образомъ, древняя греческая. *Церковно-славянская* есть не что иное, какъ греческая, выраженная только славянскими буквами.

Римляне при изображеніи чиселъ пользовались слѣдующими знаками:

1—I, 5—V, 10—X, 50—L, 100—C, 500—D, 1000—M.

При изображеніи остальныхъ чиселъ они руководствовались слѣдующимъ правиломъ:

Если меньшая цифра слѣдуетъ за большей, она увеличиваетъ число на свою величину; если же меньшая цифра предшествуетъ большей, она уменьшаетъ число на свою величину.

Сообразно съ этимъ правиломъ, они слѣдующимъ образомъ изображали числа:

1—I, 2—II, 3—III, 4—IV, 5—V, 6—VI, 7—VII, 8—VIII, 9—IX, 10—X, 11—XI, 12—XII, 13—XIII, 14—XIV, 15—XV, 16—XVI, 17—XVII, 18—XVIII, 19—XIX, 20—XX, 27—XXVII, 40—XL, 60—LX, 90—XC, 100—C. 110—CX, 150—CL, 400—CD, 600—DC, 900—CM, 1100—MC.

Числа, состоящія изъ нѣсколькихъ тысячъ, писались, какъ пишутся числа до тысячи, съ тою только разницею, что послѣ числа тысячъ внизу съ правой стороны приписывалась буква m (mille—тысяча). Такимъ образомъ, 505197=DV$_m$CXCVII.

Въ славянскомъ и греческомъ счисленіи обозначались особыми буквами первыя девять чиселъ, девять десятковъ и девять сотенъ.

Въ славянскомъ счисленіи ставятъ надъ буквою титло (҃), для обозначенія того, что буква изображаетъ число.

Въ нижеслѣдующей таблицѣ приведены параллельно греческая и славянская нумераціи:

Числа	Греческія,	Славянскія.	Числа	Греческія,	Славянскія.
1	— α —	а҃	60	— ξ —	ѯ҃
2	— β —	в҃	70	— ο —	ѻ҃
3	— γ —	г҃	80	— π —	п҃
4	— δ —	д҃	90	— η —	ч҃
5	— ε —	є҃	100	— ρ —	р҃
6	— ς —	ѕ҃	200	— σ —	с҃
7	— ζ —	з҃	300	— τ —	т
8	— η —	и҃	400	— υ —	ѵ҃
9	— ϑ —	ѳ҃	500	— φ —	ф
10	— ι —	і҃	600	— χ —	х҃
20	— κ —	к҃	700	— ψ —	ѱ҃
30	— λ —	л҃	800	— ω —	ѿ҃
40	— μ —	м҃	900	— ϡ —	ц҃
50	— ν —	н҃			

Для обозначенія тысячъ передъ числомъ тысячъ ставился въ славянскомъ счисленіи знакъ ҂, а въ греческомъ счисленіи къ числу, означавшему тысячи, присоединялась снизу черточка.

Такимъ образомъ,

55429=҂н҃є҃ѵ҃к҃ѳ=$\nu\varepsilon' \upsilon\varkappa\vartheta$

§ 55. **Происхожденіе и распространеніе десятичной нумераціи.** Хотя нельзя еще сдѣлать окончательнымъ выводомъ относительно изображенія, введенія и распространенія по Европѣ десятичной системы нумераціи, однако, литература даетъ многія весьма важныя указанія по этому вопросу. Нѣкоторые называютъ эту систему арабскою. Дѣйствительно, изъ исторіи видно, что десятичная система заимствована у арабовъ. Такъ, извѣстно, что въ началѣ XIII столѣтія тосканскій купецъ Леонардъ познакомилъ своихъ соотечественниковъ съ пріемами десятичной системы послѣ своего путешествія по Сиріи и Египту. Сакро-Боско, извѣстный преподаватель математики въ Парижѣ († 1256 г.), и Рожеръ Бэконъ своими сочиненіями наиболѣе содѣйствовали распространенію этой системы по Европѣ. Они уже указываютъ, что десятичная нумерація заимствована арабами у индѣйцевъ. Изъ памятниковъ арабской литературы достовѣрно извѣстно, что Абу-Абдаллахъ-Магометъ-Ибнъ-Муза, родомъ изъ Кораизма, въ IX столѣтіи долго путешествовалъ по Индіи и познакомилъ, по своемъ возвращеніи, арабскихъ ученыхъ съ индѣйскою нумераціей. Арабскіе писатели Авицена Абенъ-Рагель и Альсефади также приписываютъ изобрѣтеніе нумераціи индѣйцамъ.

Письменные памятники санскрита, языка древней Индіи, подтверждаютъ указанія арабскихъ писателей.

Изъ сочиненія Баскары *), индѣйскаго писателя XII вѣка, видно, что Индѣйцамъ было извѣстно за нѣсколько столѣтій до Баскары изображеніе чиселъ десятью знаками, ибо въ этомъ сочиненіи изложена связная теорія четырехъ ариѳметическихъ дѣйствій и даже извлеченіе квадратныхъ корней. Какъ Баскара, такъ и болѣе древній писатель Брамегупта считаютъ фактъ изобрѣтенія нумераціи очень древнимъ. У писателя еще болѣе древняго Аріабгата **) мы встрѣчаемъ рѣшеніе многихъ замѣчательныхъ математическихъ вопросовъ.

Эти указанія, кажется, дѣлаютъ мало вѣроятными увѣренія французскаго геометра Шаля, что десятичная система есть развитіе римскаго способа пользоваться при вычисленіяхъ столикомъ для вычисленія (Abacus) и что достаточно было одного введенія нуля, чтобы получить настоящую десятичную систему.

Ариѳметика и логистика у грековъ. Греки называли *ариѳметикой* ученіе объ общихъ свойствахъ чиселъ. Искусство же считать, или совокупность практическихъ пріемовъ при вычисленіи, греки называли *логистикою*.

Письменное счисленіе при различныхъ основаніяхъ.

§ 56. Въ десятичной системѣ выбрано за основаніе число десять. За основаніе письменнаго счисленія

*) *Поповъ*. Очеркъ развитія ариѳметики. Казань, 1873 г.

**) *Chasles*. Aperçu historique des progrès de géometrie.

можно взять всякое другое число. Въ этомъ случаѣ система получаетъ названіе по числу, принятому за основаніе. Система называется *двоичной*, *троичной*, *четверичной* и т. д., если основаніемъ ея служатъ числа 2, 3, 4 и т. д.

Для письменнаго изображенія всѣхъ чиселъ нужно столько цифръ, сколько находится единицъ въ основаніи. Такъ, для изображенія всѣхъ чиселъ при основаніи 2 нужно только 2 цифры 1 и 0, для троичной системы—три цифры 1, 2, 0 и т. д.

Если основаніе системы болѣе 10, число цифръ нужно увеличить. Такъ, для изображенія чиселъ по системѣ 12 нужно присоединить къ 10 существующимъ цифрамъ двѣ новыя для изображенія 10 и 11.

Въ каждой системѣ цифры получаютъ значеніе по мѣсту, ими занимаемому. При основаніи 3, считая отъ правой руки къ лѣвой, нужно значеніе каждой цифры увеличить втрое. Такимъ образомъ, на первомъ мѣстѣ должны находиться единицы перваго разряда,

на второмъ *тройки* или единицы 2-го разряда,
на третьемъ *девятки* (3.3=9) или ед. 3-го разряда,
на четвертомъ 27 (3.3.3=27) или ед. 4-го разряда.

Первыя десять чиселъ изображаются по троичной системѣ:

1	по	троичной	системѣ	1
2	„	„	„	2
3	„	„	„	10
4	„	„	„	11

5	по	троичной	системѣ	12
6	„	„	„	20
7	„	„	„	21
8	„	„	„	22
9	„	„	„	100
10	„	„	„	101
11	„	„	„	102

Чтобъ изобразить какое - нибудь число по другой системѣ, нужно совершить надъ числомъ послѣдовательное дѣленіе на основаніе. Такъ, чтобъ изобразить 1072 по троичной системѣ, мы опредѣляемъ, сколько въ 1072 находится единицъ второго разряда, то-есть троекъ.

Раздѣливъ 1072 на 3, получаемъ въ частномъ 357 и въ остаткѣ 1. Частное показываетъ, что единицъ второго разряда въ нашемъ числѣ будетъ 357; остатокъ 1 показываетъ *цифру перваго разряда.*

Раздѣляя 357 на 3, получаемъ въ частномъ 119, число единицъ третьяго разряда, и въ остаткѣ 0, *цифру второго разряда.*

Раздѣливъ 119 на 3, находимъ въ частномъ 39 и въ остаткѣ 2—*цифру третьяго разряда.*

Раздѣливъ 39 на 3, находимъ въ частномъ 13 и въ остаткѣ 0—*цифру четвертаго разряда.*

Раздѣливъ 13 на 3, находимъ въ частномъ 4 и въ остаткѣ 1—*цифру пятаго разряда.*

Раздѣливъ 4 на 3, находимъ въ частномъ 1 и въ остаткѣ 1—*цифру шестого разряда.*

Частное 1, будучи менѣе 3, изобразитъ *цифру седьмого разряда.*

Число 1072 по троичной системѣ изображается въ видѣ 1110201.

Послѣдовательныя дѣленія изображаютъ *письменно:*

1072	3					
1	357	3				
	0	119	3			
		2	39	3		
			0	13	3	
				1	4	3
					1	1

Вопросы къ ариѳметикѣ.

1. Основныя ариѳметическія понятія.

1. Какъ мы получаемъ понятіе о величинѣ (§ 2) *).
2. Что называютъ *мѣрою*?
3. Что называется *единицею*?
4. Что значитъ *измѣрять величину*?
5. Что есть *величина*?
6. Что называется *наименованіемъ* единицы?
7. Что называютъ *однородными* единицами?
8. Что называется *частью* единицы?
9. Что называется *числомъ* (§ 3)?
10. Какъ раздѣляются числа по ихъ отношенію къ единицѣ (§ 4)?
11. Что называется *числомъ цѣлымъ*?
12. Что называется *числомъ дробнымъ*?
13. Что значитъ *считать предметы*?
14. Въ какомъ отношеніи находится цѣлое число къ счету?
15. Какъ раздѣляются числа по ихъ отношенію къ наименованію?

*) Цифры, приведенныя въ скобкахъ, указываютъ, въ какихъ параграфахъ руководства нужно отыскивать отвѣты на предлагаемые вопросы.

16. Что такое *именованное* число?
17. Что такое *отвлеченное* число?
18. Что есть *Ариѳметика?*
19. Какъ раздѣляется Ариѳметика?

II. Нумерація.

Словесное счисленіе.

20. Какъ мы производимъ счетъ предметовъ? (§ 5).
21. Сколько цѣлыхъ чиселъ?
22. Почему цѣлыхъ чиселъ безконечное множество?
23. Что называютъ *нумераціею* или *счисленіемъ.*
24. Что есть словесное счисленіе? (§ 6).
25. Какъ называются первыя девять чиселъ и что означаютъ эти названія?
26. Какія числа заслуживаютъ особаго вниманія?
27. Какъ называются числа: одинъ, десять, сто, тысяча и т. д.?
28. Какія единицы называются *простыми* единицами?
29. Въ какомъ отношеніи находятся единицы различныхъ порядковъ?
30. Какъ раздѣляются числа на порядки? (§ 7).
31. Какъ получить названіе всѣхъ чиселъ при помощи единицъ различныхъ порядковъ?
32. Что называется *десятичною* системою счисленія?
33. Какъ называется число *десять* въ десятичной системѣ счисленія?
34. Разобрать составъ числа: *шесть милліоновъ пятьсотъ семь тысячъ двѣсти семь.*

35. Въ какомъ отношеніи находится всякое число къ единицамъ различныхъ порядковъ?

Письменное счисленіе.

36. Что есть *письменное* счисленіе? (§ 8)

37. Что есть *цифра*?

38. Сколько цифръ?

39. Написать девять *значащихъ* цифръ.

40. Какая десятая цифра?

41. Что означаетъ *нуль*?

42. На какихъ мѣстахъ ставятъ единицы различныхъ порядковъ?

43. Какъ изображаются единицы различныхъ порядковъ?

44. Какъ изображаются числа: *двадцать, тридцать* и т. д., *двѣсти; триста* и т. д., *двѣ тысячи, три тысячи* и т. д.?

45. Какими двумя правилами нужно руководиться при изображеніи чиселъ? (§ 9).

46. Чѣмъ облегчается изображеніе чиселъ? (§ 10).

47. Какъ называются различные *классы*?

48. Какъ разбиваются классы?

49. Какъ называются *грани*?

50. Какъ написать число, состоящее изъ трехъ цифръ?

51. Какъ написать число, состоящее изъ 4, 5 и 6 цифръ?

52. Какъ написать всякое число? (§ 11. Правило изображенія чиселъ).

53. Какъ называются числа, состоящія изъ одной. вухъ, трехъ цифръ и т. д.

54. Какъ выговорить какое-нибудь цѣлое число? (§ 12. Правило выговариванія чиселъ).

55. Выговорить число 17020670203‍40058.

56. Какъ называется десятичная система?

57. Какія бываютъ цифры, кромѣ арабскихъ?

III. Основныя ариѳметическія дѣйствія съ цѣлыми числами.

Предварительныя понятія объ ариѳметическихъ дѣйствіяхъ.

58. Что называется *ариѳметическимъ дѣйствіемъ?* (§ 13).

59. Что называютъ *данными* числами?

60. Что называется *искомымъ* числомъ?

61. а) Сколько ариѳметическихъ дѣйствій?

б) Какія ариѳметическія дѣйствія называются *основными* (§ 14).

62. Что значитъ *сложить*, *вычесть*, *умножить* и *раздѣлить* два числа.

63. Какъ выражаютъ словесно связь между данными числами и искомымъ въ сложеніи, вычитаніи, умноженіи и дѣленіи?

64. Какой *знакъ равенства?*

65. Какими знаками изображаютъ связь между данными числами въ сложеніи, вычитаніи, умноженіи и дѣленіи?

66. Какъ выражается письменно связь между данными числами и искомымъ въ сложеніи, вычитаніи, умноженіи и дѣленіи?

67. Когда и кѣмъ введены были знаки +, —, × и =?

Сложеніе.

68. Что есть *сложеніе*? (§ 15. Опредѣленіе).

69. Какъ называются *данныя* и *искомыя* въ сложеніи?

70. Сколько единицъ содержитъ сумма?

71. Что происходитъ при сложеніи двухъ чиселъ?

72. Что значитъ *сложить* одно число съ другимъ?

73. Какимъ знакомъ обозначается дѣйствіе сложенія?

74. Какъ складываются однозначныя числа въ сложеніи?

75. Какъ выражается въ сложеніи ходъ вычисленія словесно и письменно?

76. Какое основное свойство суммы?

77. Какъ дѣлать сложеніе цѣлыхъ чиселъ? (§ 16. Правило сложенія).

Вычитаніе.

78. Что есть *вычитаніе*? (§ 17).

79. Что происходитъ при вычитаніи цѣлыхъ чиселъ?

80. Что значитъ *вычесть* одно число изъ другого?

81. Въ какомъ отношеніи находится вычитаніе къ сложенію?

82. Какъ называются *данныя* и *искомыя* въ вычитаніи?

83. Что называютъ *уменьшаемымъ*?

84. Что называютъ *вычитаемымъ*?

85. Что называютъ *остаткомъ* или *разностью*?

86. Какой *знакъ* вычитанія?

87. Какъ выражаютъ словесно и письменно ходъ вычисленія при вычитаніи однозначныхъ чиселъ?

88. Какими способами можно вычесть одно число изъ другого?

89. Какое существуетъ *другое опредѣленіе вычитанія?*

90. На чемъ основывается вычитаніе многозначныхъ чиселъ? (§ 18).

91. Какъ облегчаютъ вычитаніе многозначныхъ чиселъ?

92. Какъ сдѣлать вычитаніе многозначныхъ чиселъ? (Правило вычитанія).

93. Какая зависимость существуетъ между данными и искомымъ вычитанія? (§ 19).

94. Что называется *ариѳметическимъ дополненіемъ?*

Умноженіе.

95. Что значитъ *умножить* число? (§ 20).

96. Что значитъ *повторить* число?

97. Что есть *умноженіе?*

98. Въ какомъ отношеніи находится умноженіе къ сложенію?

99. Какъ называются *данныя* и *искомое* въ умноженіи?

100. Что есть *множимое?*

101. Что есть *множитель?*

102. Что есть *произведеніе?*

103. Какъ еще называются множимое и множитель?

104. Что происходитъ при умноженіи двухъ цѣлыхъ чиселъ?

105. Какой *знакъ* умноженія?

106. Какъ выражается въ умноженіи связь между данными и искомымъ словесно и письменно?

107. Какое существуетъ *другое опредѣленіе* умноженія?

108. Какое *основное свойство* произведенія?

109. Что называется *таблицей умноженія?* (§ 21).

110. Кому принадлежитъ изобрѣтеніе таблицы умноженія?

111. Какъ составить Пиѳагорову таблицу?

112. Какъ найти въ Пиѳагоровой таблицѣ произведеніе двухъ однозначныхъ чиселъ?

113. Въ какой таблицѣ заключаются всѣ произведенія двухъ однозначныхъ чиселъ?

114. Какъ умножить многозначное число на однозначное? (§ 21. Правило).

115. Какъ умножить на 10, 100, 1000 и вообще на единицу съ нулями? (§ 23).

116. Какъ умножить число на другое, изображаемое цифрою съ нулями? (Правило).

117. Какъ умножить многозначное число на многозначное? (§ 24. Правило).

118. Какъ поступаютъ, если множимое и множитель оканчиваются нулями?

119. Сколько цифръ въ произведеніи?

120. Что называютъ *квадратами* чиселъ? (§ 25).

121. Что называютъ *кубами* чиселъ?

122. Что называютъ *степенями* чиселъ?

123. Какъ еще называютъ квадраты и кубы?

Дѣленіе.

124. Что есть дѣленіе? (§ 26).

125. Какъ называются данныя и искомое въ дѣленіи?

126. Что есть *дѣлимое*?

127. Что есть *дѣлитель*?

128. Что есть *частное*?

129. Что узнается также чрезъ дѣленіе?

130. Какое *другое опредѣленіе* дѣлимаго, дѣлителя и частнаго?

131. Какъ производятъ дѣленіе двухъ чиселъ 12 и 4 помощью сложенія, вычитанія и умноженія? (§ 27).

132. Въ какомъ отношеніи находится дѣленіе къ вычитанію?

133. Какіе случаи мы имѣемъ при дѣленіи двухъ цѣлыхъ чиселъ?

134. Что выражаетъ частное и чему равно дѣлимое въ случаѣ дѣленія на-цѣло?

135. Какъ можно опредѣлить дѣленіе въ случаѣ дѣленія на-цѣло?

136. Въ какомъ отношеніи находится остатокъ къ дѣлителю?

137. Чему равно дѣлимое въ случаѣ дѣленія съ остаткомъ?

138. Что происходитъ съ дѣлимымъ при дѣленіи двухъ цѣлыхъ чиселъ?

139. Въ какомъ отношеніи находится дѣленіе къ умноженію?

140. Какими знаками изображается дѣленіе?

141. Какъ мы заключаемъ при дѣленіи о цифрѣ частнаго по остатку? (§ 28).

142. Какую цифру нужно выбирать для частнаго?

143. Вывести правило для дѣленія многозначнаго числа на однозначное. (§ 29).

144. Вывести правило для дѣленія многозначнаго числа на многозначное.

145. Какъ раздѣлить многозначное число на однозначное или многозначное? (Правило).

146. Какъ найти легче цифру частнаго при дѣленіи многозначнаго числа на многозначное?

147. Какъ сокращать письменно дѣленіе?

148. Какъ раздѣлить какое-нибудь число на единицу съ нулями? (§ 30. Правило).

149. Какъ производятъ дѣленіе, если дѣлитель оканчивается нулями?

150. Какъ производятъ дѣленіе, если дѣлимое и дѣлитель окончиваются нулями?

151. Чему равно число цифръ частнаго?

152. Какая зависимость существуетъ между данными и искомымъ въ случаѣ дѣленія на-цѣло? (§ 31).

153. Какая зависимость существуетъ между данными и искомымъ въ случаѣ дѣленія съ остаткомъ?

IV. Повѣрка четырехъ основныхъ ариѳметическихъ дѣйствій.

154. Что называютъ *повѣркой*? (§ 32).

155. На чемъ основывается повѣрка?

156. Какъ повѣрить сложеніе, вычитаніе, умноженіе и дѣленіе тѣми же дѣйствіями? (§ 33).

157. Какими обратными дѣйствіями повѣряются основныя ариѳметическія дѣйствія? (§ 34).

158. Какъ повѣрить сложеніе?

159. Какъ повѣрить вычитаніе?

160. Какъ повѣрить умноженіе?

161. Какъ повѣрить дѣленіе?

V. Измѣненія суммы, разности, произведенія и частнаго.

162. Какъ измѣняется сумма? (§ 35).

163. Что называется *прибавкомъ* и *убавкомъ*?

164. Какъ измѣняется разность въ зависимости отъ измѣненія уменьшаемаго? (§ 36).

165. Какъ измѣняется разность въ зависимости отъ измѣненія вычитаемаго?

166. Когда разность измѣняется?

167. Когда произведеніе увеличивается, уменьшается и не измѣняется? (§ 37).

168. Какъ измѣняется частное отъ измѣненія одного дѣлимаго? (§ 38).

169. Какъ измѣняется частное отъ измѣненія одного дѣлителя?

170. Когда частное не измѣняется?

VI. Сложныя ариѳметическія дѣйствія. Скобки.

171. Какъ выражаются знаками результаты четырехъ основныхъ ариѳметическихъ дѣйствій? (§ 39).

172. Что называютъ *сложнымъ* дѣйствіемъ?

173. Что называютъ *ариѳметическимъ выраженіемъ*?

174. Что называютъ *членомъ*?

175. Какъ раздѣляются ариѳметическія выраженія по числу входящихъ въ него членовъ?

176. Что употребляютъ при дѣйствіяхъ съ ариѳметическими выраженіями?

177. Для чего употребляютъ *скобки*?

178. Какое начертаніе даютъ скобкамъ?

179. Какъ опредѣляютъ результаты сложнаго дѣйствія?

180. Кто ввелъ скобки?

VII. Именованныя числа.

МѢРЫ.

181. Какія числа называются *именованными*? (§ 40).

182. Что есть *математика*?

183. Что называютъ *измѣряемыми* величинами?

184. Что называютъ *знаменательнымъ числомъ*?

185. Какъ еще называютъ знаменательное число?

186. Что называютъ *таблицами мѣръ*?

187. Назвать мѣры времени. (§ 41).

188. Сколько сутокъ имѣетъ простой и високосный годъ?

189. Какой годъ называютъ високоснымъ?

190. Какъ опредѣлить, будетъ ли данный годъ високоснымъ?

191. Въ какомъ порядкѣ идутъ мѣсяцы, и сколько они имѣютъ дней?

192. Какое лѣтосчисленіе называется *Юліанскимъ*?

193. Какое лѣтосчисленіе принято въ западной Европѣ?

194. Что называется *старымъ* и *новымъ* стилемъ?

195. Какъ перейти отъ стараго стиля къ новому?

196. Когда начинаются сутки?

197. Какъ называются приборы для измѣренія времени?

198. Какія мѣры мы имѣемъ, разсматривая предметы по отношенію къ пространству (§ 42).

199. Назвать мѣры длины.

200. Какъ даютъ понятіе о размѣрахъ картины или величинѣ поля?

201. Чѣмъ измѣряются поверхности?

202. Что такое *квадратъ*?

203. Что называется квадратною саженью, квадратнымъ аршиномъ?

204. Какъ составляютъ понятіе о величинѣ площади?

205. Какъ называется квадратная верста, квадратная сажень?

206. Какъ опредѣлить число квадратныхъ аршинъ въ квадратной сажени?

207. Перечислить квадратныя мѣры.

208. Какъ дать понятіе о вмѣстимости комнаты?

209. Чѣмъ измѣряются объемы?

210. Что такое *кубъ*, *стороны* и *ребра куба*?

211. Что такое *кубическая сажень*?

212. Какъ называется кубическая верста, кубическая сажень и т. д.?

213. Какъ опредѣлить вмѣстимость комнаты?

214. Какъ опредѣлить, сколько кубическихъ аршинъ содержится въ кубической сажени?

215. Перечислить кубическія мѣры.

216. Перечислить мѣры сыпучихъ тѣлъ.

217. Перечислить мѣры жидкихъ тѣлъ.

218. Перечислить мѣры торговаго вѣса.

219. Перечислить мѣры аптекарскаго вѣса. Какъ называются приборы для измѣренія вѣса?

220. Перечислить русскія монеты.

221. Что подмѣшиваютъ къ золоту или серебру монетъ для прочности?

222. Что называютъ *пробою?*

223. Что называютъ золотомъ 56-й пробы?

224. Что называютъ *лигатурою?*

225. Перечислить мѣры бумаги.

226. Какъ происходятъ именованныя числа? (§ 44).

227. Какую единицу выбираютъ обыкновенно для измѣренія величинъ?

228. Что называется *простымъ именованнымъ числомъ?*

229. Что называютъ *составнымъ именованнымъ числомъ?*

230. Какъ выражаютъ письменно составное именованное число?

Раздробленіе именованныхъ чиселъ.

231. Что значитъ раздробить именованное число? (§ 45).

232. Что есть *раздробленіе?*

233. Какъ дѣлаютъ раздробленіе вообще?

234. Какъ раздробить простое именованное число? (Правило).

235. Какъ раздробить составное именованное число?

Превращеніе именованныхъ чиселъ.

236. Что есть *превращеніе?* (§ 46).

237. Какъ сдѣлать превращеніе?

238. Въ какомъ отношеніи находятся раздробленіе и превращеніе?

239. Какъ повѣрить раздробленіе?

240. Какъ повѣрить превращеніе?

Четыре дѣйствія съ цѣлыми именованными числами.

Сложеніе именованныхъ чиселъ.

241. Какія именованныя числа можно складывать? (§ 47).

242. Какъ сдѣлать сложеніе именованныхъ чиселъ? (Правило).

Вычитаніе именованныхъ чиселъ.

243. Какія именованныя числа можно вычитать? (§ 48).

244. Какъ сдѣлать вычитаніе именованныхъ чиселъ?

Умноженіе именованныхъ чиселъ.

245. Какія числа можно множить? (§ 49).

246. Какое число получается въ произведеніи?

247. Какъ умножить именованное число на отвлеченное?

Дѣленіе именованныхъ чиселъ.

248. Когда прибѣгаютъ къ дѣленію именованныхъ чиселъ? (§ 50).

249. Чѣмъ отличается дѣленіе именованныхъ отъ дѣленія отвлеченныхъ чиселъ?

250. Сколько случаевъ при дѣленіи именованныхъ чиселъ?

251. Что получаемъ при дѣленіи именованнаго числа на именованное?

252. Что получаемъ при дѣленіи именованнаго числа на отвлеченное?

253. Какъ раздѣлить именованное число на именованное? (Правило).

254. Какъ раздѣлить именованное число на отвлеченное? (Правило).

VIII. Приложеніе ариѳметическихъ дѣйствій къ рѣшенію задачъ.

255. Къ чему прилагаются ариѳметическія дѣйствія? (§ 51).

256. Какія величины встрѣчаются въ каждой задачѣ?

257. Чѣмъ связаны данныя и искомыя величины въ задачѣ?

258. Что значитъ *рѣшить* задачу?

259. Что нужно дѣлать для того, чтобы рѣшить задачу?

260. Что опредѣляютъ условія задачи?

261. Что значитъ *составить планъ рѣшенія задачи*?

262. Какъ раздѣляются задачи?

263. Что такое *простыя* задачи?

264. Какія задачи называются *сложными*?

265. Въ какомъ отношеніи находится сложная задача къ простой?

266. Чѣмъ опредѣляется общая связь между условіями задачи и ариѳметическими дѣйствіями?

267. Что происходитъ при сложеніи и умноженіи двухъ цѣлыхъ чиселъ?

268. Что происходитъ при вычитаніи и дѣленіи двухъ цѣлыхъ чиселъ?

269. Когда нужно складывать числа? (§ 52).

270. Когда вычитаютъ числа?

271. Когда умножаютъ числа?

272. Когда дѣлятъ цѣлыя числа?

273. Какъ выражаютъ обыкновенно время?

274. Какія задачи, содержащія время, приходится рѣшать на сложеніе именованныхъ чиселъ?

275. Какъ обращаютъ вниманіе на величину послѣдняго мѣсяца?

276. Какія задачи, содержащія время, приходится рѣшать при вычитаніи именованныхъ чиселъ?

277. Какъ выражаютъ время въ случаѣ вычитанія?

278. На что обращаютъ вниманіе при рѣшеніи сложныхъ задачъ?

279. Что нужно соблюдать при рѣшеніи задачъ?

280. Какую пользу приноситъ порядокъ въ расположеніи вычисленій?

IX. Прибавленія.

Краткія историческія свѣдѣнія о нумераціи.

281. Кто употреблялъ клинообразную нумерацію? (§ 54).

282. Кому египтяне приписываютъ изобрѣтеніе ариѳметики?

283. Какъ называется египетская нумерація?

284. Какъ изображались въ гіероглифической нумераціи нѣсколько единицъ, десятковъ, сотенъ?

285. Съ какого времени китайцы пользуются своею нумераціею?

286. Въ чемъ состоитъ китайская нумерація?

287. Какую реформу совершили въ нумераціи финикіяне?

288. Какъ финикіяне и евреи изображали числа?

289. Какія письмена вошли въ Египетъ послѣ гіероглифической нумераціи?

290. Что переняли греки у финикіянъ?

291. Какими семью знаками пользовались римляне для изображенія чиселъ?

292. Какимъ правиломъ руководились римляне при изображеніи чиселъ?

293. Какъ изображались тысячи у римлянъ?

294. Написать римскою нумераціею 505197.

295. Какія числа обозначались особыми буквами въ славянскомъ и греческомъ счисленіи?

296. Чѣмъ отличалась въ славянскомъ счисленіи буква отъ числа?

297. Какъ обозначались тысячи въ славянскомъ и греческомъ счисленіи? (§ 55).

298. У кого заимствовали европейцы десятичную систему счисленія?

299. Что сдѣлалъ Леонардъ для десятичной системы счисленія?

300. Что сдѣлали Сакро-Боско и Рожеръ Бэконъ для десятичной системы?

301. У кого заимствовали арабы десятичную систему?

302. Что извѣстно изъ арабской литературы о заимствованіи десятичной системы арабами у индѣйцевъ?

303. Что извѣстно изъ сочиненій Баскары, Брамегупты и Аріабгата о десятичной системѣ?

304. Какъ назывался у римлянъ столикъ для вычисленія?

305. Что называли греки *Ариѳметикой?*

306. Что называли греки *логистикою?*

Письменное счисленіе при различныхъ основаніяхъ.

307. Какое основаніе въ десятичной системѣ?

308. Какія числа можно принять за основаніе?

309. Какая система называется *двоичною?*, *троичною?*

310. Сколько цифръ нужно для изображенія чиселъ при различныхъ основаніяхъ?

311. Какъ изобразить какое-нибудь число по другой системѣ?

Оглавленіе.